Beiträge zu einer universelleren Anwendung der Querlibelle für die Controlle der fundamentalen Sternörter.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

genehmigt

von der Philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

Von

Julius Liebmann

aus Barmen.

Tag der Promotion: 25. November 1905.

Referenten:
Geh. Regierungsrat Professor Dr. Foerster
Professor Dr. Bauschinger.

Göttingen 1905
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Berlin.
Mayer & Müller.

Vita.

Am 6. Juli 1880 wurde ich, Carl Julius Liebmann, zu Padaug auf Sumatra (Niederl. Indien) geboren. Ich bin evangelischer Konfession und der älteste Sohn des Fabrikanten Julius Liebmann und seiner Ehefrau Elise, geb. Rabanus. In Barmen besuchte ich die Oberrealschule, die ich Ostern 1899 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Dann studierte ich 11 Semester lang in Bonn, Marburg uud Berlin Mathematik, Astronomie und Naturwissenschaften. Von April 1904 bis Januar 1905 war ich wissenschaftlich tätig an der Königl. Sternwarte zu Berlin, von da ab beim Königl. Meteorologischen Institut, ebenfalls in Berlin. Am 2. Februar 1905 bestand ich in Berlin das Doktorexamen.

Gehört habe ich die Vorlesungen der Herren: Bauschinger, v. Bezold, Dilthey, Foerster, Helmert, Hensel, Lehmann, Filhés, Marcuse und Schwarz.

Vorliegende Abhandlung verdanke ich den Anregungen des Herrn Geheimrat Foerster, aus dessen Vorlesungen über Astrometrie sie hervorging. Für die stete, überaus liebenswürdige Unterstützung bei der Abfassung dieser Arbeit sei ihm auch an dieser Stelle der verbindlichste Dank ausgesprochen.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548904_0031

Einleitung.

In seiner Abhandlung „Beiträge zur Ausgleichung der fundamentalen Ortsbestimmungen am Himmel“ von Prof. Dr. W. Foerster (Kiel 1904) giebt der Verfasser Methoden der Ableitung der letzten unbekannten Correktionen der Positionen am Himmel an, die wegen ihrer durchgreifenden Allgemeinheit und der Vielseitigkeit der Art ihrer Messungen und deren Resultaten eine nähere Betrachtung derselben für die praktische Anwendung und Rechnung wohl wünschenswert erscheinen lassen. Ausgehend von dem fundamentalen Dreiecke der Ortsbestimmungen am Himmel, (Pol, Zenit, Stern) giebt der Verfasser die Ableitung der Hauptformel V als Grundlage für den Ausgang von Beobachtungsreihen und deren Verwertung in allen beliebigen Azimuten. Das zur Messung dienende Instrument ist ein Universalinstrument, wie es auf der Berliner Sternwarte unter dem Namen des „Universal Transit“ aufgestellt ist und bei Beobachtungen dieser Art bereits gute Dienste geleistet hat. Bislang war es üblich, die an die fundamental bereits bekannten Näherungswerte der Sternpositionen noch anzubringenden letzten Korrektionen durch Messungen im Meridian oder ersten Vertikal, also durch spezielle Fälle der Beobachtungen, zu ermitteln. Die vorliegende Methode jedoch zeigt, wie grade durch Messungen in allen Azimuten des Kreisendes der Horizontalaxe des Instrumentes und bei den verschiedensten Zenitdistanzen des beobachteten Objektes Gleichungen zu erlangen sind, die einer schliesslichen Bestimmung und Ausgleichung der gesuchten Correktionen durch die Mannigfaltigkeit und die Art der Beobachtungen ein erheblich grösseres Gewicht an Genauigkeit zu erteilen imstande sind. Nicht allein aber die vermehrte Häufigkeit der Messungen erhöht hier den Grad der Sicherheit, vor allem sind die zur Anwendung kommenden Apparate, Libelle, Pendel-Uhr und Mikrometer, die vollkommensten Winkel und Zeitmessinstrumente, mit denen die Feintechnik den praktischen Astronomen ausstattet. Durch ausschliessliche Verwendung dieser drei Messwerkzeuge ist den Resultaten der

Beobachtungen gewiss eine Genauigkeit verbürgt, die bei Anwendung geteilter Kreise kaum zu erreichen ist. Ausserdem werden die Ergebnisse von den Wirkungen der Strahlenbrechung nur differentiell beeinflusst.

Die Grundformel V, nach der die Aufstellung der Bedingungen für die gesuchten Grössen sich vollzieht, lautet ganz allgemein: (nach pag. 34 der oben citierten Abhandlung)

$$(U - U_v) \sec \varkappa \frac{15\, Su}{\sin 1''} g_0 \cos \delta_0^0 \sin [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$$

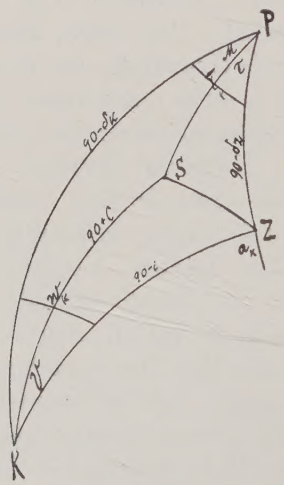
$$- \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} (U - U_v)}{\sin 1''} g_0 \cos \delta_0^0 \cos [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0] + \sin C \,(i \sin V_0^0 + k^0 \cos V_0^0$$

$$+ (x_t - d\alpha_t) \cos (\delta_k^0) \cos [(w_k^0) - V_0^0]) + dV_t \cos C + y_t \sin a_k^0$$

$$- d\delta_t \frac{\cos (\delta_k^0)}{\cos \delta_0^0} \sin [(w_k^0) - V_0^0] + (x_t - d\alpha_t) \sin (\delta_k^0)$$

$$= - y \sin a_k^0 + d\delta \frac{\cos (\delta_k^0)}{\cos \delta_0^0} \sin [(w_k^0) - V_0^0] - (x - d\alpha) \sin \delta_k^0 - dV_c \ldots$$

Diese Gleichung gilt für die Durchgänge eines Sternes in jedem Azimut des Kreisendes der Horizontalaxe bei jedem Einstellungswinkel V des Fernrohrs. In den sphärischen Dreiecken, auf die sich ihre Herleitung stützt, ist



P der Pol der täglichen Drehung,
S der Ort des beobachteten Gestirnes,
Z der Zenitpunkt des Beobachters,
K der an die Sphäre projizierte Pol der Horizontalaxe.

In den durch Verbindung dieser Punkte entstehenden Dreiecken ist:

$$PS = (90-\delta) \quad PK = (90-\delta_k) \quad PZ = (90-\delta_z)$$
$$ZS = z, \quad ZK = z_k \text{ und } SK = (90+C).$$

Die sphärischen Winkel sind:

$$ZPS = \tau = (\alpha_z - \alpha) \qquad PZS = (180-a)$$
$$ZPK = \tau_k = (\alpha_z - \alpha_k) \qquad PZK = (180-a_k)$$

wo also jetzt α_z und δ_z die Aequatorealkoordinaten des Scheitelpunktes, oder Sternzeit und Polhöhe, und α_k und δ_k die entsprechenden Grössen für das Kreisende K der Horizontalachse bedeuten.

Ferner seien bezeichnet die Winkel

PKZ mit w_k und SKZ mit V, so dass $PKS = (w_k - V)$ ist.

Statt der unbekannten strengen Grössen α, δ, α_z, δ_z und V nun sind in die obige Gleichung eingeführt deren bereits durch andere fundamentale Beobachtungen bekannte Näherungswerte, vermehrt um ihre letzte, noch unbekannte Korrektion, indem gesetzt wurde:

$$\alpha = \alpha^0 + d\alpha \qquad \alpha_z = \alpha_z^0 + x \qquad V = V^0 + dV$$
$$\delta = \delta^0 + d\delta \qquad \delta_z = \delta_z^0 + y.$$

Hierin bedeuten $d\alpha$ und $d\delta$ die Verbesserungen der Näherungswerte der Sternkoordinaten, x ist die Correktion des Wertes der Sternzeit, y die des Näherungswertes der geographischen Breite.

Setzen wir noch $a_k = a_k^0 - k$ und $z_k = z_k^0 - i = 90 - i$, so haben wir in i die Neigung der Horizontalachse des Universalinstrumentes gegen den wahren Horizont und in k den Azimutalfehler des messenden Instrumentes.

Um aber für die verschiedenen Zeiten der Beobachtung die durch Präcession, Nutation, Aberration, Parallaxe und Refraktion für die einzelnen Uhrzeiten verschiedenen Werte der Näherungsgrössen bequemer verwenden zu können, sind diese wiederum zusammengesetzt aus einem für eine anzunehmende Epoche festen Werte und den für die Zeit bis zur Beobachtung noch anzubringenden bekannten Correktionen, so dass wir haben:

$$\alpha^0 = \alpha_0^0 + d\alpha_t \qquad \alpha_z^0 = (\alpha_z^0) + x_t \qquad V^0 = V_0^0 + dV_t$$
$$\delta^0 = \delta_0^0 + d\delta_t \qquad \delta_z^0 = (\delta_z^0) + y_t$$

Die mit diesen Grössen der Epoche aus den Dreiecksrelationen:

$$tg\,(\tau_k^0) = \frac{tg\,a_k^0}{\sin(\delta_z^0)}$$
$$\sin(\delta_k^0) = -\cos(\delta_z^0)\cos a_k^0$$
$$\mathrm{tg}\,(w_k^0) = \mathrm{cotg}\,(\delta_z^0)\sin a_k^0$$

berechneten Werte seien mit (τ_k^0) (δ_k^0) und (w_k^0) bezeichnet.

U ist die direkt beobachtete Sternzeit, während U_v ein im Bereiche der Durchgangszeiten liegender Mittelwert der Uhrangaben ist. Ausgehend von der Bedingung:

$$M_v = (\tau_k^0) - \tau_v^0 = (\tau_k^0) - U_v - \Delta U_0^0 + \alpha_0^0$$

wo M_v nach Einführung der Hülfsgrössen:

$$g_0 \cos H_0 = \sin(\delta_k^0) \sin[(w_k^0) - V_0^0]$$

und

$$g_0 \sin H_0 = \cos[(w_k^0) - V_0^0]$$

hervorgeht aus

$$\cos \pm (M_v - H_0) = \cos H_0 \operatorname{cotg}(\delta_k^0) tg\, \delta_0^0 = \frac{\sin[(w_k^0) - V_0^0] \cos(\delta_k^0) tg\, \delta_0^0}{g_0}$$

entscheidet man sich inbetreff der Wahl des Zeichens für den Wert von $(M_v - H_0)$, der

$$U_v = (\tau_k^0) - \Delta U_0^0 + \alpha_0^0 - Mv$$

in die Nähe der beobachteten Uhrzeiten bringt. Zur scharfen Berechnung von M_v gilt auch nach Umformung:

$$tg\, \tfrac{1}{2}(M_v - H_0) = \pm \sqrt{\frac{\sin[(\delta_k^0) - \delta_0^0] + 2\cos(\delta_k^0) \sin \delta_0^0 \sin^2 \tfrac{1}{2} H_0}{\sin[(\delta_k^0) + \delta_0^0] - 2\cos(\delta_k^0) \sin \delta_0^0 \sin^2 \tfrac{1}{2} H_0}}.$$

I. Rechnerische Behandlung der linken Seite der V-Gleichung.

Es ist sicherlich von Interesse und verschafft dem Rechner einige Erleichterung, wenn die numerische Behandlung der linken Seite unserer V-Gleichung einer näheren Betrachtung unterworfen wird.

Die Differenz $(U - Uv)_{sec}$ würde sich, nach dem schon oben gesagten, aus den beobachteten Durchgangszeiten nach Darstellung von H_0 in Funktion der bekannten oder leicht zu rechnenden Näherungswerte und nach einmaliger strenger Rechnung von M_v für eine Beobachtungsreihe jedesmal schnell ergeben, ihre Berechnung bietet also keinerlei Schwierigkeit.

Die Grösse S_u findet sich in den meisten Logarithmentafeln angegeben, der Ausdruck $\frac{15\, S_u}{\sin 1''}$ ist deshalb mit dem Argumente $(U - U_v)_{sec}$ zu tabulieren. Bei sechsstelliger Rechnung ergiebt sich, da die Grösse $\frac{15\, S_u}{\sin 1''}$ stets in der Nähe von 15 liegen wird, eine Genauigkeit auf Tausendstel, die meist ausreichen wird bei Sternen in mittleren und südlichen Deklinationen. Ganz in der Nähe des Poles ist es bei grossen Fadendistanzen geboten, von dem Gebrauche dieser Tafel abzusehen und die Werte $\frac{15\, S_u}{\sin 1''}$ für die Durchgänge schärfer einzeln zu

rechnen Bedient man sich indessen, und so wird es in der Praxis meist der Fall sein, bei Polsternen nur der Fäden der Mittelgruppe oder des beweglichen Mikrometerfadens in der Nähe des Mittelfadens, so dürfte bei nicht allzulangen Durchgangszeiten die Tafel noch ausreichen, besonders wo bei Polsternen, wie weiter unten sich zeigt, der zweite Faktor $g_0 \cos \delta_0^0 \sin [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ sich der Null nähert. Es unterliegt eine definitive Entscheidung inbezug auf die Anwendbarkeit der Tafel in solchen Fällen natürlich allein der Kritik des Rechners.

$(U - U_v)$	$\frac{15\, S_u}{\sin 1''}$											
	0ˢ		10ˢ		20ˢ		30ˢ		40ˢ		50ˢ	
m												
0	1.176	091	1.176	091	1.176	091	1.176	091	1.176	090	1.176	090
1		089		089		088		088		087		086
2		085		084		083		082		081		080
3		078		077		076		074		072		071
4		069		067		065		063		061		059
5		056		054		052		049		047		044
6		041		038		036		033		030		027
7		023		020		017		013		010		006
8		003		5999		995		991		987		983
9		5979		975		971		966		962		958
10		953		948		944		939		934		929
11		924		919		914		909		904		898
12		893		887		881		876		870		864
13		858		852		846		840		834		827
14		821		814		808		802		794		788
15		781		774		767		760		753		745

Die Grösse $2\, \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(U - U_v)}{\sin 1''}$ ist, ebenfalls mit dem Argumente $(U - U_v)_{sec}$, den „Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen“, von Th. Albrecht zu entnehmen und zwar den Tabellen 25a, 25b und 30 im Anhange.

Die Koeffizienten

$$g_0 \cos \delta_0^0 \sin [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$$

und

$$g_0 \cos \delta_0^0 \cos [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$$

der beiden ersten Glieder der V-Gleichung sind für eine jede Beobachtungsreihe einmal streng zu rechnen. Da aber nun (nach Seite 34, Zeile 11 der oben erwähnten Abhandlung)

$$g_0 \cos \delta_0^0 \cos [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0] = \sin [(w_k^0) - V_0^0] \cos (\delta_k^0) \sin \delta_0^0$$

ist, so haben wir auch

$$g_0^2 \cos^2 \delta_0^0 \sin^2 [(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0] = g_0^2 \cos^2 \delta_0^0 - \sin^2 [(w_k^0) - V_0^0] \cos^2 \delta_k^0 \sin^2 \delta_0^0$$

und, da nach obiger Einführungsgleichung für g_0 und H_0 auch

$$g_0^2 = \sin^2(\delta_k^0)\sin^2[(\alpha_k^0) - V_0^0] + \cos^2[(\alpha_k^0) - V_0^0]$$

wird, so ist

$$g_0^2 \cos^2\delta_0^0 \sin^2[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0] = \cos^2\delta_0^0 - \sin^2[(\alpha_k^0) - V_0^0]\cos^2(\delta_k^0).$$

Aus dem sphärischen Dreiecke KPS folgt:

$$\sin^2\delta_0^0 = \cos^2(\delta_k^0)\cos^2[(\alpha_k^0) - V_0^0] - 2\cos(\delta_k^0)\sin(\delta_k^0)\cos C \sin C \cos[(\alpha_k^0) - V_0^0]$$

so dass

$$\cos^2\delta_0^0 - \cos^2(\delta_k^0)\sin^2[(\alpha_k^0) - V_0^0] = \sin^2(\delta_k^0) + 2\cos(\delta_k^0)\sin(\delta_k^0)\sin C \cos[(\alpha_k^0) - V_0^0].$$

Hierin sind die Glieder von der Ordnung der zweiten Potenz von $\sin C$ in den Koeffizienten von $(U - U_v)$ vernachlässigt, da C den Wert von 1000″ praktich nicht übersteigt. Der Koeffizient des ersten Gliedes lautet also nunmehr nach Einsetzen dieses Ausdruckes:

$$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0] = \sqrt{\sin^2(\delta_k^0) + 2\cos(\delta_k^0)\sin\delta_k^0 \sin C \cos[(\alpha_k^0) - V_0^0]}$$

oder für die Kontrole der späteren Resultate für die Tabulierung mit genügender Näherung:

$$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0] = \sin(\delta_k^0).$$

Beide Faktoren sind auf diese Weise in Funktion der beobachteten Grössen $(\delta_g^0)\,\delta_0^0$ und V_0^0 ausgedrückt und als solche mit diesen Argumenten sofort genähert den folgenden Tafeln zu entnehmen.

$V = 45^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
−5	0.00				+ 0.09			
0	— 0.42	0.00			0.00	0.00		
5	— 0.57	— 0.40	0.00		— 0.07	— 0.08	— 0.09	
10	— 0.66	— 0.54	— 0.38	0.00	— 0.13	— 0.14	— 0.16	— 0.17
15	— 0.71	— 0.62	— 0.50	— 0.35	— 0.17	— 0.19	— 0.21	— 0.23
20	— 0.74	— 0.67	— 0.58	— 0.47	— 0.20	— 0.22	— 0.25	— 0.28
25	— 0.76	— 0.70	— 0.62	— 0.53	— 0.21	— 0.24	— 0.28	— 0.31
30	— 0.76	— 0.71	— 0.64	— 0.56	— 0.21	— 0.25	— 0.29	— 0.33
35	— 0.75	— 0.70	— 0.64	— 0.57	— 0.19	— 0.24	— 0.29	— 0.34
40	— 0.72	— 0.68	— 0.63	— 0.56	— 0.17	— 0.23	— 0.28	— 0.33
45	— 0.68	— 0.64	— 0.60	— 0.54	— 0.14	— 0.21	— 0.27	— 0.32
50	— 0.63	— 0.59	— 0.56	— 0.51	— 0.11	— 0.18	— 0.25	— 0.30
55	— 0.57	— 0.54	— 0.51	— 0.47	— 0.07	— 0.15	— 0.22	— 0.28
60	— 0.50	— 0.48	— 0.45	— 0.41	— 0.04	— 0.12	— 0.19	— 0.25
65	— 0.42	— 0.41	— 0.38	— 0.34	0. 0	— 0.09	— 0.16	— 0.23
70	— 0.34	— 0.34	— 0.31	— 0.26	+ 0.03	— 0.06	— 0.13	— 0.21
75	— 0.25	— 0.26	— 0.23	— 0.17	+ 0.05	— 0.03	— 0.11	— 0.19
80	— 0.16	— 0.18	— 0.14	0.00	+ 0.07	— 0.01	— 0.10	— 0.17
85	0 00	— 0.09	0.00		+ 0.09	0.00	— 0.09	
90		0.00				0 00		

$V = 35^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
5	0.00				— 0.09			
10	— 0.46	0.00			— 0.15	— 0.17		
15	— 0.61	— 0.43	0.00		— 0.19	— 0.22	— 0.25	
20	— 0.70	— 0.57	— 0.41	0.00	— 0.22	— 0.25	— 0.29	— 0.32
25	— 0.74	— 0.65	— 0.53	— 0.38	— 0.22	— 0.26	— 0.31	— 0.35
30	— 0.76	— 0.69	— 0.60	— 0.49	— 0.20	— 0.27	— 0.31	— 0.36
35	— 0.76	— 0.71	— 0.63	— 0.55	— 0.17	— 0.24	— 0.30	— 0.35
40	— 0.74	— 0.70	— 0.64	— 0.57	— 0.13	— 0.20	— 0.27	— 0.33
45	— 0.70	— 0.67	— 0.63	— 0.57	— 0.08	— 0.16	— 0.23	— 0.30
50	— 0.64	— 0.63	— 0.60	— 0.55	— 0.02	— 0.11	— 0.19	— 0.26
55	— 0.57	— 0.57	— 0.55	— 0.51	+ 0.04	— 0.05	— 0.14	— 0.21
60	— 0.49	— 0.50	— 0.49	— 0.46	+ 0.10	0.00	— 0.09	— 0.16
65	— 0.39	— 0.42	— 0.42	— 0.40	+ 0.16	+ 0.05	— 0.04	— 0.12
70	— 0.26	— 0.32	— 0.34	— 0.33	+ 0.21	+ 0.10	0.00	— 0.08
75	0.00	— 0.21	— 0.25	— 0.25	+ 0.25	+ 0.14	+ 0.04	— 0.05
80		0.00	— 0.16	— 0.17		+ 0.17	+ 0.07	— 0.02
85			0.00	— 0.09			+ 0.09	— 0.01
90				0.00				0.00

$V = 40^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
0	0.00				0.00			
5	— 0.44	0.00			— 0.08	— 0.09		
10	— 0 58	— 0.42	0.00		— 0.14	— 0.16	— 0.17	
15	— 0.67	— 0.55	— 0.39	0.00	— 0.18	— 0.21	— 0.23	— 0.25
20	— 0.73	— 0.63	— 0.52	— 0.36	— 0.20	— 0.24	— 0.27	— 0.30
25	— 0.76	— 0.68	— 0.59	— 0.48	— 0 21	— 0.25	— 0.29	— 0.33
30	— 0.77	— 0.71	— 0.63	— 0.54	0.20	— 0.25	— 0.30	— 0.34
35	— 0.76	— 0.71	— 0.64	— 0.57	— 0 18	— 0.24	— 0.29	— 0.34
40	— 0 73	— 0.69	— 0.64	— 0.57	— 0.15	— 0.21	— 0.27	— 0.33
45	— 0.69	— 0.66	— 0.62	— 0.56	— 0.11	— 0.18	— 0.25	— 0.31
50	— 0.64	— 0.62	— 0 58	— 0.53	— 0.07	— 0.14	— 0.22	— 0.28
55	— 0.58	— 0.56	— 0.53	— 0.49	— 0.02	— 0.10	— 0.18	— 0.24
60	— 0.50	— 0.49	— 0.47	— 0.44	+ 0.03	— 0.06	— 0.14	— 0.21
65	— 0.41	— 0.42	— 0.41	— 0.38	+ 0 07	— 0.02	— 0.10	— 0.18
70	— 0.31	— 0.34	— 0.33	— 0.31	+ 0.11	+ 0.02	— 0.07	— 0.15
75	— 0.21	— 0.25	— 0.25	— 0.23	+ 0.14	+ 0.05	— 0.04	— 0.12
80	0.00	— 0.16	— 0.17	— 0.14	+ 0.17	+ 0.07	— 0.02	— 0.10
85		0.00	— 0.09	0.00		+ 0.09	0.00	— 0.09
90			— 0.00				0.00	

$V = 30^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0 - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
10	0.00				— 0.17			
15	— 0.48	0.00			— 0.22	— 0.25		
20	— 0.63	— 0.46	0.00		— 0.24	— 0.28	— 0.32	
25	— 0.72	— 0.60	— 0.43	0.00	— 0.23	— 0.29	— 0.34	— 0.38
30	— 0.76	— 0.67	— 0.55	— 0.39	— 0.21	— 0.27	— 0.33	— 0.39
35	— 0.77	— 0.70	— 0.61	— 0.50	— 0.17	— 0.24	— 0.31	— 0.37
40	— 0.75	— 0.70	— 0.64	— 0.56	— 0.11	— 0.19	— 0.27	— 0.34
45	— 0.70	— 0.68	— 0.64	— 0.58	— 0.04	— 0.13	— 0.22	— 0.29
50	— 0.64	— 0.64	— 0.61	— 0.57	+ 0 03	— 0.07	— 0.16	— 0.24
55	— 0.56	— 0.58	— 0.56	— 0.53	+ 0.11	0.00	— 0.09	— 0.18
60	— 0.45	— 0.50	— 0.50	— 0.48	+ 0.19	+ 0.07	— 0.03	— 0.12
65	— 0.31	— 0.39	— 0.42	— 0.42	+ 0.26	+ 0.14	+ 0.03	— 0.06
70	0.00	— 0.23	— 0.33	— 0.35	+ 0.32	+ 0.20	+ 0.09	— 0.01
75		0.00	— 0.20	— 0.26		+ 0 25	+ 0.14	+ 0.03
80			0.00	— 0.15			+ 0.17	+ 0.06
85				0.00				+ 0.09

$V = 25^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
15	0.00				— 0.25			
20	— 0.51	0.00			— 0.27	— 0.32		
25	— 0.66	— 0.48	— 0.00		— 0.26	— 0.33	— 0.38	
30	— 0.74	— 0.62	— 0.45	0.00	— 0.23	— 0.31	— 0.37	— 0.43
35	— 0.76	— 0.69	— 0.57	— 0.41	— 0.17	— 0.26	— 0.34	— 0.40
40	— 0.74	— 0.71	— 0.63	— 0.52	— 0.09	— 0.19	— 0.28	— 0.36
45	— 0.70	— 0.69	— 0.64	— 0.57	0.00	— 0.11	— 0.21	— 0.30
50	— 0.63	— 0.64	— 0.62	— 0.57	+ 0.09	— 0.02	— 0.13	— 0.23
55	— 0.52	— 0.57	— 0.57	— 0.54	+ 0.19	+ 0.07	— 0.04	— 0.15
60	— 0.37	— 0.47	— 0.50	— 0.49	+ 0.29	+ 0.16	+ 0.04	— 0.07
65	0.00	— 0.33	— 0.40	— 0.42	+ 0.38	+ 0.25	+ 0.12	0.00
70		0.00	— 0.28	— 0.33		+ 0.32	+ 0.19	+ 0.07
75			0.00	— 0.22			+ 0.25	+ 0.13
80				0.00				+ 0.17

$V = 20^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
20	0.00				— 0.32			
25	— 0.55	0.00			— 0.30	— 0.38		
30	— 0.70	— 0.52	0.00		— 0.25	— 0.35	— 0.43	
35	— 0.76	— 0.66	— 0.48	0.00	— 0.18	— 0.28	— 0.38	— 0.47
40	— 0.75	— 0.70	— 0.60	— 0.44	— 0.08	— 0.19	— 0.30	— 0.40
45	— 0.70	— 0.68	— 0.64	— 0.54	+ 0.04	— 0.09	— 0.21	— 0.32
50	— 0.60	— 0.63	— 0.63	— 0.57	+ 0.17	+ 0.03	— 0.10	— 0.22
55	— 0.44	— 0.54	— 0.58	— 0.55	+ 0.30	+ 0.15	+ 0.01	— 0.12
60	0.00	— 0.39	— 0.48	— 0.50	+ 0.43	+ 0.27	+ 0.12	+ 0.01
65		0.00	— 0.35	— 0.41		+ 0.38	+ 0.22	+ 0.09
70			0.00	— 0.29			+ 0.32	+ 0.18
75				0.00				+ 0.25

$V = 15^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
25	0.00				— 0.38			
30	— 0.61	0.00			— 0.31	— 0.43		
35	— 0.74	— 0.57	0.00		— 0.20	— 0.33	— 0.47	
40	— 0.76	— 0.68	— 0.52	0.00	— 0.06	— 0.21	— 0.36	— 0.49
45	— 0.69	— 0.70	— 0.63	— 0.47	+ 0.11	— 0.07	— 0.23	— 0.37
50	— 0.52	— 0.63	— 0.64	— 0.56	+ 0.29	+ 0.10	— 0.08	— 0.23
55	0.00	— 0.47	— 0.57	— 0.56	+ 0.47	+ 0.27	+ 0.08	— 0.09
60		0.00	— 0.42	— 0.49		+ 0.43	+ 0.24	+ 0.06
65			0.00	— 0.37			+ 0.38	+ 0.20
70				0.00				+ 0.32

$V = 10^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
30	0.00				— 0.43			
35	— 0.69	0.00			— 0.26	— 0.47		
40	— 0.76	— 0.64	0.00		— 0.04	— 0.27	— 0.49	
45	— 0.64	— 0.70	— 0.58	0.00	+ 0.21	— 0.05	— 0.28	— 0.50
50	0.00	— 0.58	— 0.64	— 0.52	+ 0.49	+ 0.20	— 0.06	— 0.29
55		0.00	— 0.52	— 0.57		+ 0.47	+ 0.18	— 0.06
60			0.00	— 0.46			+ 0.43	+ 0.17
65				0.00				+ 0.38

$V = 5^0$

δ \ δ_z	$g_0 \cos\delta_0^0 \sin[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55	$g_0 \cos\delta_0^0 \cos[(\tau_k^0) - \tau_v^0 - H_0]$ 40	45	50	55
35	0.00				— 0.47			
40	— 0.77	0.00			— 0.03	— 0.49		
45	0.00	— 0.71	0.00		+ 0.50	— 0.03	— 0.50	
50		0.00	— 0.64	0.00		+ 0.49	— 0.03	— 0.49
55			0.00	— 0.57			+ 0.47	— 0.03
60				0.00				+ 0.43

Die mikrometrische Ausmessung im Gesichtsfelde liefert nur die Komponente $(V'-V_c)_f$, die Grösse C selbst bestimmt sich nach den Formeln unseres sphärischen Dreieckes und ist für die einzelnen Durchgangsmomente zu rechnen. Aus ΔKPS folgt:

$$-\sin C = \sin(\delta_k^0)\sin\delta_0^0 + \cos(\delta_k^0)\cos\delta_0^0\cos[(\tau_k^0)+\alpha_0^0-\Delta U_0^0-U]$$

oder auch:

$$-\sin C = \cos[(\delta_k^0)-\delta_0^0] - 2\cos(\delta_k^0)\cos\delta_0^0\sin^2\tfrac{1}{2}[(\tau_k^0)+\alpha_0^0-\Delta U_0^0-U]$$

C bleibt innerhalb der Grenzen des Einstellungsgebietes, überschreitet also nicht den Wert von 1000″. Nach Einführung von U_v lautet dann unser Ausdruck auch:

$$C = -\frac{\cos[(\delta_k^0)-\delta_0^0]}{\sin 1''} + 2\sin^2\tfrac{1}{2}\,\frac{[\{(\tau_k^0)+\alpha_0^0-\Delta U_0^0-U_v\}-\{U-U_v\}]}{\sin 1''}\cos(\delta_k^0)\cos\delta_0^0.$$

Der Wert von $[(\tau_k^0)+\alpha_0^0-\Delta U_0^0-U_v]$ bleibt im Verlaufe der Beobachtungsreihe konstant, $(U-U_v)$ wurde oben schon berechnet und verwendet. Der ganze Betrag von $2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{[(\tau_k^0)+\alpha_0^0-\Delta U_0^0-U_v]-[U-U_v]}{\sin 1''}\right)$ ist deshalb leicht für jedes U aus den „Formeln und Hülfstafeln“ von Th. Albrecht zu entnehmen. Zusammen mit dem für die Zeit der Beobachtungsreihe konstanten $\cos(\delta_k^0)\cos\delta_0^0$ ergiebt dieses Glied nach Anbringen an das ebenfalls unveränderliche $-\frac{\cos[(\delta_k^0)-\delta_0^0]}{\sin 1''}$ die Grösse C.

Man kann nun für jede Beobachtungszeit U den zugehörigen Wert von C berechnen, sind aber viele Fäden registriert, so verfährt man tabellarisch. Rechnet man für gleichgrosse Intervalle des Argumentes $(U-U_v)_s$ die zugehörigen Werte von C, so lässt sich bei der anzustrebenden Genauigkeit (die Angabe von C auf ganze Bogenminuten genügt) mit wenigen, für den Anfang, die Mitte und das Ende der Durchgangszeit darzustellenden Werten von C leicht ein Täfelchen konstruiren, aus dem die C für die einzelnen Uhrmomente U mit dem Argumente $(U-U_v)$ interpolatorisch schnell auf die Bogenminute genau zu entnehmen sind.

Der Wert der Neigung i der Horizontalachse des Instrumentes ändert sich während der Durchgänge von Aequatorsternen nur sehr wenig, so dass ein aus Anfangs- und Schlussablesung der Axenlibelle gewonnener Mittelwert in die Rechnung einzuführen ist. Bei Sternen höherer Deklinationen ist ein aus Anfangs- und Schlussbeobachtungen gewonnenes, der Zeit proportionales Glied einzuführen.

Für den strengen Azimutalfehler k, der längere Zeit konstant bleibt, ist ein Mittelwert k^0 zu setzen, ein etwaiger Fehler in k beeinträchtigt wegen des Faktors $\sin C$ die Genauigkeit der Rechnung nicht. Für den Faktor von $(x_t-d\alpha_t)$ ergiebt sich aus Dreieck PKS:

jedesmal zu rechnende Grösse, die aber auch noch einer Vereinfachung zu unterziehen ist.

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} K_r^0(\operatorname{tg} V' - \operatorname{tg} V_c^0) &= K_r^0 \sec V' \sec V_c^0 (\sin V' \cos V_c^0 - \cos V' \sin V_c^0) \\ &= K_r^0 \sec^2 V_c^0 \sin (V' - V_c^0) = K_r^0 \sec^2 V_c^0 \sin 1'' (V' - V_c^0) \\ &= K_r^0 \sec^2 V_c^0 \sin 1'' \{(V' - V_c)_f + dV_l\}. \end{aligned}$$

Die Vertauschung von $\sec V'$ mit $\sec V_c^0$ hat bei der Kleinheit des Gliedes keinen Einfluss. Nach Eintragung lautet nunmehr unser Ausdruck:

$$d(V - V')_r = (K_r - K_r^0) \operatorname{tg} V_c^0 + K_r^0 \sec^2 V_c^0 \sin 1'' \{(V' - V_c^0)_f + dV_l\}.$$

Nach Vereinigung dieses Gliedes mit den übrigen in dV_t enthaltenen Grössen ergiebt sich für dieses:

$$\begin{aligned} dV_t = (V_c^0 - V_0^0) + (V' - V_c)_f \{1 + K_r^0 \sin 1'' \sec^2 V_c^0\} + (K - K_r^0) \operatorname{tg} V_c^0 \\ + dV_l \{1 + K_r^0 \sin 1'' \sec^2 V_c^0\}. \end{aligned}$$

Der Wert in der Klammer ist für die Zeit längerer Beobachtungsreihen in gleicher Zenitdistanz konstant, es berechnet sich also dV_t für eine jede Einstellung sehr leicht aus den für jede Uhrzeit U beobachteten Werten $(V' - V_c)_f$, dV_l und K.

Die weiter noch auftretenden Grössen $d\alpha_t$ und $d\delta_t$ sind die den Sternephemeriden zu entnehmenden Korrektionen der α_0^0 und δ_0^0 bis zum Momente der Beobachtung, hervorgerufen durch Präzession, Nutation, Aberration und Parallaxe.

y_t ist als bekannte Variation der geographischen Breite (δ_z^0) den Registern der Polhöhenänderungen, veröffentlicht vom Centralbureau der internationalen Erdmessung, scharf zu entnehmen. x_t sind die durch den Gang der Uhr hervorgerufenen Veränderungen der Uhrkorrektion, die hinreichend sicher zu ermitteln sind.

II Behandlung der rechten Seite der V-Gleichung.

Die allgemeinste Form der Grundgleichung V bietet uns die Möglichkeit, durch Anwendung derselben auf Beobachtungen in Meridian, Vertikal und grösster Digression der Polsterne ganz spezielle Beziehungen der Unbekannten untereinander aufzustellen; sie erlaubt uns aber auch weiter, durch Messungen in allen beliebigen Azimuten die mannigfaltigsten Relationen zwischen den letzten Verbesserungen der Oerter der Gestirne zu erzielen. Durch stete Veränderung der Lage des Kreisendes K bei Festhalten ein und desselben Winkels V können in stets nahe gleichbleibenden Zenitdistanzen der beobachteten Sterne rings um den Scheitelpunkt Messungen ausgeführt werden, die höchst wertvolle Resultate und Anhaltspunkte für die letzte Verfeinerung und Ausgleichung der Positionen am Himmel zu geben vermögen. Die Coefficienten der Unbekannten auf der rechten

Seite sind als Funktionen der bei Beobachtungen dieser Art stets wechselnden Grössen a_k, δ_k und w_k den vielfältigsten Aenderungen unterworfen, sie sind deshalb einer genaueren Bestimmung der gesuchten Korrektionen ganz besonders dienlich.

Die weiter unten angehängten Tafeln nun geben ein Gesamtbild der Ergebnisse der Messungen dieser Art in den verschiedensten Azimuten. Mit den Argumenten der Deklinationen δ der Sterne von 5 zu 5 Grad fortschreitend und mit den Polhöhen δ_z von 40 bis 55 Grad sind für die Winkel V von 5 bis 45 Grad aus ihnen die Koeffizienten der Unbekannten y, $(x - d\alpha)$ und $d\delta$ zu entnehmen. Desgleichen sind die zu jeder Beobachtung nötigen Einstellungsdaten gegeben. Die mit a_k überschriebene Rubrik nämlich giebt für die Messung mit dem zugehörigen V den einzustellenden Azimutalwinkel für das Kreisende K, während die mit τ bezeichnete Spalte den Stundenwinkel des Sternes von der gewünschten Deklination bei dieser Einstellung a_k und V im Momente des Durchganges giebt, so dass sich also die Sternzeit Θ für die Beobachtung ergiebt aus:

$$\Theta = \alpha + \tau.$$

In diesen Tafeln sind auch numerisch enthalten die schon oben erwähnten Spezialfälle der Messungen in Meridian, Vertikal und grösster Digression.

Die Tabellen erlauben uns nun, mit den drei Argumenten δ_z, δ und V den Ausdruck der rechten Seite der bei den Beobachtungen zu erhaltenden Gleichungen direkt genähert zu entnehmen. Es würden z. B. für ein $V = 40^0$ in den behandelten vier Polhöhen für einen Stern von der Deklination $\delta = 60^0$ folgende vier Gleichungen aufzustellen sein:

$$W_{40} = -0.76\, y_{40} + 0.50\,(x_{40} - d\alpha_{60}) + 0.06\, d\delta_{60} - dV_{cI} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} +\ 49^0.34 \\ -\ 130.66 \end{matrix} \text{ und } \tau = +3^h\ 47^m\ 29^s$$

$$W_{45} = -0.71\, y_{45} + 0.49\,(x_{45} - d\alpha_{60}) - 0.14\, d\delta_{60} - dV_{cII} \quad " \quad " = \begin{matrix} +\ 45^0.52 \\ -\ 134.48 \end{matrix} \quad " \quad \tau = +4^h\ 16^m\ 58^s$$

$$W_{50} = -0.67\, y_{50} + 0.47\,(x_{50} - d\alpha_{60}) - 0.32\, d\delta_{60} - dV_{cIII} \quad " \quad " = \begin{matrix} +\ 42^0.51 \\ -\ 137.49 \end{matrix} \quad " \quad \tau = +4^h\ 45^m\ 31^s$$

$$W_{55} = -0.65\, y_{55} + 0.44\,(x_{55} - d\alpha_{60}) - 0.48\, d\delta_{60} - dV_{cIV} \quad " \quad " = \begin{matrix} +\ 40^0.30 \\ -\ 139.70 \end{matrix} \quad " \quad \tau = +5^h\ 14^m\ 26^s$$

wo mit W ganz allgemein die aus den Beobachtungen sich ergebende, bekannte linke Seite bezeichnet sei.

Die vorliegenden Tafeln gestatten uns nun auch, die gewünschten Daten ebenfalls für die Beobachtungen in den Azimuten des Kreisendes zwischen $+90^0$ über $+180^0$ bis $+270^0$ zu entnehmen, d. h. die Coeffizienten der gesuchten Unbekannten und die für den Moment der Beobachtung nötigen Angaben auch für den Durchgang des Sternes auf der der ersteren Messung korrespondierenden Seite des Meridians aufzustellen. Ist ein Stern S_1 mit einem V_1 im Osten be-

obachtet, so ist er im Westen nach seinem Meridiandurchgang mit demselben V_1 wieder zu erreichen. Aus Gründen der Symmetrie ergiebt sich für die Einstellungsdaten bei beiden Messungen:

$$a_{k_1} \text{ und } 180 - a_{k_1} \quad \text{für die Azimute des Kreisendes,}$$

und

$$\tau_1 \text{ und } 360 - \tau_1 \quad \text{für die Stundenwinkel des Sterns.}$$

Für diese zweite, zur ersteren korrespondierenden Beobachtung nun sind wegen der gleichen sphärischen Dreiecke in beiden Fällen die absoluten Beträge der Coeffizienten dieselben, und da:

$$\sin a_{k_1} = \sin a_{k_2}$$
$$\cos \delta_k \text{ wesentlich positiv}$$
$$\sin \delta_k = -\cos a_k \cos \delta_z$$

ist, so behalten y und $d\delta$ ihr Zeichen, während $(x - d\alpha)$ bei der zweiten Beobachtung dasselbe wechselt. Es würden also für die oben schon benutzten Argumente die 8 Gleichungen zu den korrespondierenden Ost- und Westmessungen lauten:

$$W_{40\,\mathrm{I}} = -0.76\, y_{40} - 0.50\,(x_{40} - d\alpha_{60}) + 0.06\, d\delta_{60} - dV_{c\,\mathrm{I}} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} - \ 49°34 \\ + 130.66 \end{matrix} \text{ und } \tau = -3^h\ 47^m\ 29^s$$

$$W_{40\,\mathrm{II}} = -0.76\, y_{40} + 0.50\,(x_{40} - d\alpha_{60}) + 0.06\, d\delta_{60} - dV_{c\,\mathrm{I}} \quad „ \quad „ = \begin{matrix} + \ 49°34 \\ - 130.66 \end{matrix} \quad „ \quad \tau = +3^h\ 47^m\ 29^s$$

$$W_{45\,\mathrm{I}} = -0.71\, y_{45} - 0.49\,(x_{45} - d\alpha_{60}) - 0.14\, d\delta_{60} - dV_{c\,\mathrm{II}} \quad „ \quad „ = \begin{matrix} - \ 45°52 \\ + 134.48 \end{matrix} \quad „ \quad \tau = -4^h\ 16^m\ 58^s$$

$$W_{45\,\mathrm{II}} = -0.71\, y_{45} + 0.49\,(x_{45} - d\alpha_{60}) - 0.14\, d\delta_{60} - dV_{c\,\mathrm{II}} \quad „ \quad „ = \begin{matrix} + \ 45°52 \\ - 134.48 \end{matrix} \quad „ \quad \tau = +4^h\ 16^m\ 58^s$$

. . . . . .

u. s. w. ähnlich auch für die Polhöhen $\delta_z = 50°$ und $\delta_z = 55°$.

In gleicher Weise sind nun für die Durchgänge aller Sterne in den behandelten Deklinationen, Polhöhen und V die rechten Seiten der Hauptgleichung schnell aufzustellen. Es ist dadurch dem Rechner die Möglichkeit geboten, sich über die resultierenden Coeffizienten der Unbekannten vor der Beobachtung klar zu sein, gleichzeitig aber erleichtern ihm die Tafeln durch Angabe von a_k und τ die Einstellung der zu beobachtenden Sterne.

Die Bedingungen für Messungen in Meridian und Vertikal sind gleichfalls, die ersteren direkt, letztere interpolatorisch den vorliegenden Tabellen zu entnehmen.

Im Meridian wird $\sin \delta_k = 0$, es fällt also das Glied mit $(x - d\alpha)$ fort, und es würden sich z. B. für die Polhöhe $\delta_z = 50°$ die Meridiangleichungen für V von 15 und 10 Grad folgendermassen gestalten:

$$W_{35} = +1.00\, y_{50} - 1.00\, d\delta_{35} - dV_{c15}$$
$$W_{40} = +1.00\, y_{50} - 1.00\, d\delta_{40} - dV_{c10}$$
$$W_{60} = -1.00\, y_{50} + 1.00\, d\delta_{60} - dV_{c10}$$
$$W_{65} = -1.00\, y_{50} + 1.00\, d\delta_{65} - dV_{c15}$$

Im Ost-West-Vertikal wird $\sin a_k = 0$, es lauten deshalb für dieselbe Polhöhe und dieselben V die Bedingungen der Vertikalmessungen:

$W_{49} = +0.63\,(x_{\mathrm{I}} - d\alpha_{49}) - 0.20\, d\delta_{49} - dV_{c10}$ bei $a_k = 0^0$ und $\tau = \pm 1^h\ 1^m\ 15^s$
$W_{48} = +0.64\,(x_{\mathrm{II}} - d\alpha_{48}) - 0.28\, d\delta_{48} - dV_{c15}$ „ „ $= 0^0$ „ $\tau = \pm 1^h\ 32^m\ 47^s$

wo im Meridian Sterne der Deklinationen $\delta = 35^0$, 40^0, 60^0 und 65^0, im Vertikal solche von 48^0 und 49^0 mit $V = 10^0$ und $V = 15^0$ erreicht wurden. In den grössten Digressionen wird, wie die zu Grunde liegende Abhandlung zeigt, der Faktor von $d\delta$ zu Null, so dass z. B. für $\delta_z = 50^0$, $V = 35^0$ und $\delta_s = 69°3$ die Bedingungen lauten:

Digression Ost: $Wd_{\mathrm{I}} = -0.83\, y_{50} - 0.35\,(x - d\alpha_s) - dV_{35}$ bei $a_k = \begin{matrix} -\ 56°64 \\ +123.36 \end{matrix}$ u. $\tau = -4^h\,12^m\,19^s$

„ West: $Wd_{\mathrm{II}} = -0.83\, y_{50} + 0.35\,(x - d\alpha_s) - dV_{35}$ „ „ $= \begin{matrix} +\ 56°64 \\ -123.36 \end{matrix}$ „ $\tau = +4^h\,12^m\,19^s$

III. Die Verwertung der V-Gleichung.

Unsere Aufgabe soll sein, mit Hülfe der V-Gleichungen Relationen zwischen den letzten Verbesserungen der Sternörter aufzustellen, d. h. die durch Messungen der oben beschriebenen Art zu gewinnenden Beziehungen in zweckdienlicher Weise zu einer Berechnung der $d\alpha$ und $d\delta$ der Sterne zu verwenden. Es wird die definitive Bestimmung dieser Grössen natürlich einer allgemeinen Ausgleichung unterworfen sein, nachdem die durch die Mannigfaltigkeit der Messungen sehr zahlreich aufzustellenden Bedingungen zwischen diesen Verbesserungen oder deren Summen und Differenzen von den übrigen noch in den Gleichungen enthaltenen Unbekannten befreit sind.

Die Grösse x ist als letzte, definitive Correktion der Sternzeit für die Dauer einer längeren Beobachtungszeit als konstant anzusetzen, es ist diese Grösse daher aus den Ergebnissen einer Messungsreihe zu eliminieren.

Bei Beobachtungsreihen selbst von längerer Dauer ist es ein Erfordernis der Methode, dass dV_c einen konstanten Betrag beibehält, durch Verbindung zweier korrespondierender Messungen ist in diesem Falle eine Elimination dieser Grösse möglich. dV_c behält aber nur dann seinen Wert bei, wenn die Verbindung der Querlibelle mit der Horizontalaxe des Instrumentes eine absolut sichere ist. Liest man in solchem Falle das Niveau ab, so hat man wirklich in seinen jeweiligen Veränderungen den Wert von dV_l. Mindert sich aber im Verlaufe der Beobachtungen die Befestigung des Querniveaus mit der Axe, etwa durch Aus-

lösen von Spannungen, so ändert dV_c seinen Wert und die Ablesungen des Niveaus werden illusorisch. Die Feinheit der Instrumentaltechnik hat aber auch diesen Punkt überwunden. Die jetzt gebräuchliche seitliche Flanschklemmung bei der Befestigung der Libelle und das Anbringen zweier sich gegenseitig kontrollierender Niveaus an den Enden der Axe bürgen wohl für eine fast absolute Sicherheit inbezug auf die Konstanz von dV_c.

Die Unbekannte y ist endlich unabhängig nur zu bestimmen mit Hülfe der Beobachtungen im System K, wo bei festem Azimut in den verschiedenen Zenitdistanzen beobachtet wird, das in der vorliegenden Abhandlung von W. Foerster gleichfalls entwickelt wird. Die aus Messungen dieser Art hervorgehenden Bedingungen bieten in Verbindung mit den Ergebnissen der V-Gleichung einen Weg für eine direkte Berechnung der Polhöhenkorrektion y.

Die V-Gleichung ergiebt in Verbindung mit K-Gleichungen bei Anschliessung zweier grösster Digressionen eines Polsterns an einen Südstern eine von den Deklinationen unabhängige Bestimmung von y. Sei z. B. beobachtet mit $V = 35^0$ bei $\delta_z = 50^0$ in grösster östlicher und westlicher Digression ein Stern S_3 mit $\delta_3 = 69°3$, so lauten die beiden erhaltenen Bedingungen:

$$W_{d\,\mathrm{I}} = -0.83\, y_{50} - 0.35\,(x - d\alpha_3) - dV_{35} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} - \ 56°64 \\ + 123.36 \end{matrix} \text{ und } \tau = -4^h\,12^m\,19^s$$

$$W_{d\,\mathrm{II}} = -0.83\, y_{50} + 0.35\,(x - d\alpha_3) - dV_{35} \quad „ \quad „ = \begin{matrix} + \ 56°64 \\ - 123.36 \end{matrix} \quad „ \quad \tau = +4^h\,12^m\,19^s$$

ihre halbe Summe $\frac{1}{2}\,(W_{d\,\mathrm{I}} + W_{d\,\mathrm{II}}) = -0.83\, y_{50} - dV_{35}$.

Ist zwischen beiden Digressionen von S_3 mit demselben $V = 35^0$ im Süden ein Stern S_1 mit $\delta_1 = 15^0$ im Meridian beobachtet, so haben wir für ihn die Gleichung:

$$W_m = +1.00\, y_{50} - 1.00\, d\delta_1 - dV_{35}.$$

Aus der halben Differenz beider Gleichungen erhalten wir:

$$\tfrac{1}{2}\,(W_m - \tfrac{1}{2}\,(W_{d\,\mathrm{I}} + W_{d\,\mathrm{II}})) = +0.92\, y_{50} - 0.50\, d\delta_1.$$

Durch Beobachtung desselben Sternes S_1 im System K im Ost-West-Vertikal resultiert die Gleichung:

$$y_{50} = 1.97\, d\delta_1 + D \quad \text{(Seite 39 der angeführten Abhandlung).}$$

Wenn $\frac{1}{2}\,(W_m - \frac{1}{2}\,(W_{d\,\mathrm{I}} + W_{d\,\mathrm{II}})) = W$ gesetzt ist und beide Gleichungen vereinigt werden, so resultiert:

$$y_{50} = 1.504\, W + 0.382\, D$$

so dass y_{50} hier lediglich in Funktion der beobachteten Daten unabhängig von den Deklinationen zu bestimmen ist.

Uebergehend zu den Bestimmungen der Correktionen der Rektascensionen und Deklinationen der Sterne selbst erhalten wir wohl das beste Bild der zweckmässigen Verwertung unserer V-Gleichung durch Zusammenstellen der aus den Beobachtungen gewonnenen Ergebnisse, wie sie aus den angehängten Tafeln genähert zu entnehmen sind. Es ist bei Messungeu im Systeme V nötig, zur Erlangung der erwünschten Koeffizienten vor Beginn der Beobachtungen die Azimute festzulegen, in denen die zu verbessernden Sterne mit den vorgeschriebenen V zu erreichen sind. Nur wenn ein fester Plan entworfen ist, lässt sich schon im Voraus über die Möglichkeit einer späteren Ausgleichung entscheiden.

Sind z. B. zur Erlangung der Deklinationsverbesserungen zwei Polsterne von $\delta_1 = 80^0$ und $\delta_2 = 85^0$ in der Polhöhe $\delta_z = 50^0$ in oberer und unterer Culmination und in der Nähe der grössten Digressionen mit $V = 45^0$, $V = 40^0$ und $V = 35^0$ nach einander beobachtet, so resultieren für die einzelnen Messungen die Gleichungen:

$$W = -0.97\, y_{50} - 0.14\,(x - d\alpha_{80}) - 0.57\, d\delta_{80} - dV_{45} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} -\ 77^{\circ}15 \\ +102.85 \end{matrix} \text{ und } \tau = -7^h\ 40^m\ 19^s$$

$$W = -0.97\, y_{50} + 0.14\,(x - d\alpha_{80}) - 0.57\, d\delta_{80} - dV_{45} \text{ „ „ } = \begin{matrix} +\ 77^{\circ}15 \\ -102.85 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +7^h\ 40^m\ 19^s$$

$$W_1 = -0.97\, y_{50} - 0.57\, d\delta_{80} - dV_{45}$$

$$W_2 = -1.00\, y_{50} - 1.00\, d\delta_{85} - dV_{45} \qquad \text{im Meridian „ } \tau = 12^h\ 0^m\ 0^s$$

$$W = -0.96\, y_{50} - 0.17\,(x - d\alpha_{80}) - 0.11\, d\delta_{80} - dV_{40} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} -\ 74^{\circ}42 \\ +105.58 \end{matrix} \text{ und } \tau = -5^h\ 36^m\ 5^s$$

$$W = -0.96\, y_{50} + 0.17\,(x - d\alpha_{80}) - 0.11\, d\delta_{80} - dV_{40} \text{ „ „ } = \begin{matrix} +\ 74^{\circ}42 \\ -105.58 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +5^h\ 36^m\ 5^s$$

$$W_3 = -0.96\, y_{50} - 0.11\, d\delta_{\ 0} - dV_{40}$$

$$W = -0.99\, y_{50} - 0.09\,(x - d\alpha_{85}) - 0.05\, d\delta_{85} - dV_{40} \text{ „ „ } = \begin{matrix} -\ 82^{\circ}22 \\ +\ 97.78 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -5^h\ 48^m\ 5^s$$

$$W = -0.99\, y_{50} + 0.09\,(x - d\alpha_{85}) - 0.05\, d\delta_{85} - dV_{40} \text{ „ „ } = \begin{matrix} +\ 82^{\circ}22 \\ -\ 97.78 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +5^h\ 48^m\ 5^s$$

$$W_4 = -0.99\, y_{50} - 0.05\, d\delta_{85} - dV_{40}$$

$$W = -0.97\, y_{50} - 0.16\,(x - d\alpha_{80}) + 0.41\, d\delta_{80} - dV_{35} \text{ „ „ } = \begin{matrix} -\ 75^{\circ}72 \\ +104.28 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -3^h\ 38^m\ 11^s$$

$$W = -0.97\, y_{50} + 0.16\,(x - d\alpha_{80}) + 0.41\, d\delta_{80} - dV_{35} \text{ „ „ } = \begin{matrix} +\ 75^{\circ}72 \\ -104.28 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +3^h\ 38^m\ 11^s$$

$$W_5 = -0.97\, y_{50} + 0.41\, d\delta_{80} - dV_{35}$$

$$W_6 = -1.00\, y_{50} + 1.00\, d\delta_{85} - dV_{35} \qquad \text{im Meridian „ } \tau = 0^h\ 0^m\ 0^s.$$

Kombinieren wir W_1 mit W_2, um dV_{45} zu eliminieren, und ebenso die übrigen Gleichungen, so haben wir für die Ausgleichung:

$$W_{\mathrm{I}} = +0.01\, y_{50} - 0.28\, d\delta_{80} + 0.50\, d\delta_{85}$$
$$W_{\mathrm{II}} = +0.01\, y_{50} - 0.06\, d\delta_{80} + 0.02\, d\delta_{85}$$
$$W_{\mathrm{III}} = +0.01\, y_{50} + 0.20\, d\delta_{80} - 0.50\, d\delta_{85}.$$

Der Koeffizient von y in diesen Gleichungen ist ein sehr kleiner, es wird nach Einsetzen seines Wertes sich die Ausgleichung vornehmen lassen, besonders wenn durch Messungen mit zwischenliegenden V die Anzahl der Bedingungen sich noch erhöht. Bei $V = 50^0$ und $V = 30^0$ ist auch der Stern mit $+80^0$ Deklination in oberer und unterer Culmination zu erreichen, die Faktoren von $d\delta_{80}$ würden in diesen Fällen sich auch zwischen -0.5 und $+0.5$ bewegen und so der Ausgleichung eine noch grössere Sicherheit bieten.

Ist nun vollends ein Zusammenarbeiten mehrerer Sternwarten in den verschiedensten Polhöhen möglich, so lassen sich aus den Ergebnissen der Beobachtungen im System V eine noch grössere Zahl von Bedingungen zwischen den Verbesserungen der Sternpositionen aufstellen.

Seien z. B. für die in den Tafeln enthaltenen Polhöhen von 40^0, 45^0, 50^0 und 55^0 Messungen der Sterne $\delta_1 = 75^0$ und $\delta_2 = 80^0$ angestellt, so würden die erhaltenen Relationen lauten:

$$W = -0.94\, y_{40} - 0.25\,(x_1 - d\alpha_{75}) + 0.22\, d\delta_{75} - dV_{\mathrm{I}45} \quad \text{bei } a_k = \begin{matrix} -\ 70^{\circ}75 \\ +109.25 \end{matrix} \text{ und } \tau = -4^{\mathrm{h}}\ 16^{\mathrm{m}}\ 53^{\mathrm{s}}$$

$$W = -0.94\, y_{40} + 0.25\,(x_1 - d\alpha_{75}) + 0.22\, d\delta_{75} - dV_{\mathrm{I}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} +\ 70^{\circ}75 \\ -109.25 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +4^{\mathrm{h}}\ 16^{\mathrm{m}}\ 53^{\mathrm{s}}$$

$$W_1 = -0.94\, y_{40} + 0.22\, d\delta_{75} - dV_{\mathrm{I}45}$$

$$W = -0.98\, y_{40} - 0.16\,(x_1 - d\alpha_{80}) + 0.44\, d\delta_{80} - dV_{\mathrm{I}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} -\ 78^{\circ}23 \\ +101.77 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -3^{\mathrm{h}}\ 44^{\mathrm{m}}\ 38^{\mathrm{s}}$$

$$W = -0.98\, y_{40} + 0.16\,(x_1 - d\alpha_{80}) + 0.44\, d\delta_{80} - dV_{\mathrm{I}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} +\ 78^{\circ}23 \\ -101.77 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -3^{\mathrm{h}}\ 44^{\mathrm{m}}\ 38^{\mathrm{s}}$$

$$W_2 = -0.98\, y_{40} + 0.44\, d\delta_{80} - dV_{\mathrm{I}45}$$

$$W = -0.93\, y_{45} - 0.26\,(x_2 - d\alpha_{75}) - 0.13\, d\delta_{75} - dV_{\mathrm{II}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} -\ 68^{\circ}73 \\ +111.27 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -5^{\mathrm{h}}\ 29^{\mathrm{m}}\ 41^{\mathrm{s}}$$

$$W = -0.93\, y_{45} + 0.26\,(x_2 - d\alpha_{75}) - 0.13\, d\delta_{75} - dV_{\mathrm{II}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} +\ 68^{\circ}73 \\ -111.27 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +5^{\mathrm{h}}\ 29^{\mathrm{m}}\ 41^{\mathrm{s}}$$

$$W_3 = -0.93\, y_{45} - 0.13\, d\delta_{75} - dV_{\mathrm{II}45}$$

$$W = -0.97\, y_{45} - 0.18\,(x_2 - d\alpha_{80}) - 0.09\, d\delta_{80} - dV_{\mathrm{II}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} -\ 75^{\circ}84 \\ +104.16 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -5^{\mathrm{h}}\ 39^{\mathrm{m}}\ 58^{\mathrm{s}}$$

$$W = -0.97\, y_{45} + 0.18\,(x_2 - d\alpha_{80}) - 0.09\, d\delta_{80} - dV_{\mathrm{II}45} \quad \text{„ „ } = \begin{matrix} +\ 75^{\circ}84 \\ -104.16 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +5^{\mathrm{h}}\ 39^{\mathrm{m}}\ 58^{\mathrm{s}}$$

$$W_4 = -0.97\, y_{45} - 0.09\, d\delta_{80} - dV_{\mathrm{II}45}$$

$$W = -0.92\, y_{50} - 0.23\,(x_3 - d\alpha_{75}) - 0.45\, d\delta_{75} - dV_{\text{III}45} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} -\ 68^{\circ}98 \\ +\ 111.02 \end{matrix} \text{ und } \tau = -6^h\ 45^m\ 36^s$$

$$W = -0.92\, y_{50} + 0.23\,(x_3 - d\alpha_{75}) - 0.45\, d\delta_{75} - dV_{\text{III}45} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad = \begin{matrix} +\ 68^{\circ}98 \\ -\ 111.02 \end{matrix} \quad \text{„} \quad \tau = +6^h\ 45^m\ 36^s$$

$$W_5 = -0.92\, y_{50} - 0.45\, d\delta_{75} - dV_{\text{III}45}$$

und auf ähnliche Weise

$$W_6 = -0.97\, y_{50} - 0.57\, d\delta_{80} - dV_{\text{III}45} \text{ bei } a_k = \begin{matrix} -\ 77^{\circ}15 \\ +\ 102.85 \end{matrix} \text{ und } \tau = \mp 7^h\ 40^m\ 19^s$$

$$\left.\begin{aligned} W_7 &= -0.95\, y_{55} - 0.74\, d\delta_{75} - dV_{\text{IV}45} \\ W_8 &= -1.00\, y_{55} - 1.00\, d\delta_{80} - dV_{\text{IV}45} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{bei } a_k = \begin{matrix} -\ 72^{\circ}45 \\ +\ 107.55 \end{matrix} \text{ und } \tau = +8^h\ 18^m\ 10^s \\ \text{„} \quad \text{„} = \mp 90 \text{ und } \tau = 12^h\ 0^m\ 0^s. \end{matrix}$$

Für $V = 35^0$ erhalten wir ebenso:

$$\left.\begin{aligned} W_9 &= -0.95\, y_{45} + 0.56\, d\delta_{75} - dV_{35} \\ W_{10} &= -1.00\, y_{45} + 1.00\, d\delta_{80} - dV_{35} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{bei } a_k = \begin{matrix} -\ 72^{\circ}45 \\ +\ 107.55 \end{matrix} \text{ und } \tau = \mp 3^h\ 47^m\ 45^s \\ \text{im Meridian} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} W_{11} &= -0.92\, y_{50} + 0.17\, d\delta_{75} - dV_{35} \\ W_{12} &= -0.97\, y_{50} + 0.41\, d\delta_{80} - dV_{35} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{bei } a_k = \begin{matrix} -\ 66^{\circ}62 \\ +\ 113.38 \end{matrix} \text{ und } \tau = \mp 4^h\ 6^m\ 17^s \\ \text{„} \quad \text{„} = \begin{matrix} -\ 75^{\circ}72 \\ +\ 104.28 \end{matrix} \quad \text{„} \quad \tau = \mp 3^h\ 38^m\ 11^s \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} W_{13} &= -0.89\, y_{55} - 0.19\, d\delta_{75} - dV_{35} \\ W_{14} &= -0.95\, y_{55} - 0.13\, d\delta_{80} - dV_{35} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{„} \quad \text{„} = \begin{matrix} -\ 63^{\circ}69 \\ +\ 116.31 \end{matrix} \quad \text{„} \quad \tau = \mp 5^h\ 16^m\ 41^s \\ \text{„} \quad \text{„} = \begin{matrix} -\ 72^{\circ}52 \\ +\ 107.48 \end{matrix} \quad \text{„} \quad \tau = \mp 5^h\ 31^m\ 19^s. \end{matrix}$$

Nach paarweiser Vereinigung dieser Gleichungen sind die Bedingungen für die Ausgleichung:

$$\begin{aligned} W_a &= +0.02\, y_{40} + 0.11\, d\delta_{75} - 0.22\, d\delta_{80} \\ W_b &= +0.02\, y_{45} - 0.06\, d\delta_{75} + 0.04\, d\delta_{80} \\ W_c &= +0.02\, y_{50} - 0.22\, d\delta_{75} + 0.28\, d\delta_{80} \\ W_d &= +0.02\, y_{55} - 0.37\, d\delta_{75} + 0.50\, d\delta_{80} \\ W_e &= +0.02\, y_{45} + 0.28\, d\delta_{75} - 0.50\, d\delta_{80} \\ W_f &= +0.02\, y_{50} + 0.08\, d\delta_{75} - 0.20\, d\delta_{80} \\ W_g &= +0.03\, y_{55} - 0.10\, d\delta_{75} + 0.06\, d\delta_{80}\,. \end{aligned}$$

Treten noch mehr Beobachtungen in unterschiedlicheren Polhöhen und den verschiedensten V hinzu, so vermehrt sich die Zahl der Bedingungen, und die Koefffzienten der Unbekannten auf der rechten Seite wechseln dann sowohl der Grösse als auch dem Zeichen nach in einer der Ausgleichung günstigsten Weise. Die Aufstellung der Gleichungen für die Berechnung der $d\delta$ der Südsterne er-

giebt sich in ähnlicher Weise. Für V bis 50° lassen sich in südlichen Polhöhen ebenso sehr zahlreiche Bedingungen aufstellen, die einer Ausgleichung der Deklinationskorrektionen auch der Aquatorsterne gute Dienste leisten. Mit einem $V > 50^0$ zu beobachten ist einerseits wegen der Mannigfaltigkeit der durch Messungen mit der Querlibelle in allen Azimuten zu erhaltenden Relationen nicht erforderlich, andererseits auch nicht geboten wegen der ungleichmässigen und nicht genau festzulegenden Wirkungen der Strahlenbrechung in solch grossen Entfernungen vom Scheitelpunkt. Darin aber gerade liegt wiederum eine Stärke der Methode, dass durch Fortfall der Beobachtungen in grösseren Zenitdistanzen eine Unsicherheit der Bestimmung des Winkel V und damit der Correktionen der Sternörter aufgehoben wlrd.

Durch Messungen mit der Querlibelle sind ferner für Anschlüsse von Polsternen an Südsterne von nahezu derselben Deklination besonders günstige Bedingungen zur Erlangung der Deklinationskorrektionen geboten. Schliessen wir nämlich den einen Südstern nach Beobachtungen in den zum Meridian korrespondierenden Azimuten an die obere, den zweiten an die untere Kulmination des Polsternes an, so erhalten wir aus der Vereinigung dieser Resultate überaus günstige Beziehungen zwischen den $d\delta$ des Polsternes und den Summen und Differenzen der $d\delta$ der Südsterne.

Was die Bedingungen für die Verbesserungen der Rektascensionen der Fundamentalsterne anbetrifft, so sind sie der Zahl und auch der Brauchbarkeit für die Ausgleichung nach ebenso ergiebig wie die Relationen für die Deklinationsverbesserungen dieser Sterne. Aus den Tafeln geht hervor, dass, vom Meridian zum Ost- oder Westvertikal fortschreitend, sich die absoluten Beträge der Koeffizienten der Unbekannten von 0 bis 1 bewegen, und dass sie infolge ihres Wertes sind δ_x in niedrigen Polhöhen zu ihren grössten Beträgen anwachsen, also an Mannigfaltigkeit den Faktoren der $d\delta$ nicht nachstehen. Am schnellsten veränderlich sind die Coeffizienten der $d\alpha$ in der Nähe des Meridians, die Messungen in der Umgebung der Azimute $\pm 90^0$ des Kreisendes sind daher recht häufig mit den verschiedensten V auszuführen, um möglichst unterschiedliche Coeffizienten für die Ausgleichung der $d\alpha$ zu erlangen.

Die fasslichste Anschauung für den Gang der Betrachtungen zu Rektascensionsbestimmungen wird auch hier wieder durch die Aufstellung der gewonnenen Beziehungen, wie sie aus den Tafeln zu entnehmen sind, geboten.

Seien z. B. gemessen mit $V = 40^0$ und $V = 30^0$ zwei Sterne mit den Deklinationen $+20^0$ und $+30^0$ in einer Polhöhe von 45^0, so haben wir die Bedingungen:

$$W_a = +0.44\,y_{45} - 0.63\,(x - d\alpha_{20}) - 0.74\,d\delta_{20} - dV_{40}$$
$$W_b = +0.44\,y_{45} + 0.63\,(x - d\alpha_{20}) - 0.74\,d\delta_{20} - dV_{40}$$

und

$$W_c = +0.09\,y_{45} - 0.71\,(x - d\alpha_{30}) - 0.58\,d\delta_{30} - dV_{40}$$
$$W_d = +0.09\,y_{45} + 0.71\,(x - d\alpha_{30}) - 0.58\,d\delta_{30} - dV_{40}$$

$V = 40°$

bei $a_k = \begin{matrix} +\ 26°05 \\ -153.95 \end{matrix}$ und $\tau = -2^h\,31^m\,41^s$

„ „ $= \begin{matrix} -\ 26°05 \\ +153.95 \end{matrix}$ „ $\tau = +2^h\,31^m\,41^s$

„ „ $= \begin{matrix} +\ 5°25 \\ -174°75 \end{matrix}$ „ $\tau = -3^h\,10^m\,36^s$

„ „ $= \begin{matrix} -\ 5°25 \\ +174°75 \end{matrix}$ „ $\tau = +3^h\,10^m\,36^s$

Ebenso

$$W_1 = +0.76\,y_{45} - 0.46\,(x - d\alpha_{20}) - 0.87\,d\delta_{20} - dV_{30}$$
$$W_2 = +0.76\,y_{45} + 0.46\,(x - d\alpha_{20}) - 0.87\,d\delta_{20} - dV_{30}$$

$V = 30°$

bei $a_k = \begin{matrix} +\ 49°87 \\ -130°13 \end{matrix}$ und $\tau = -1^h\,20^m\,14^s$

„ „ $= \begin{matrix} -\ 49°87 \\ +130.13 \end{matrix}$ „ $\tau = +1^h\,20^m\,14^s$

$$W_3 = +0.32\,y_{45} - 0.67\,(x - d\alpha_{30}) - 0.63\,d\delta_{30} - dV_{30}$$
$$W_4 = +0.32\,y_{45} + 0.67\,(x - d\alpha_{30}) - 0.63\,d\delta_{30} - dV_{30}$$

„ „ $= \begin{matrix} +\ 18°52 \\ -161.48 \end{matrix}$ „ $\tau = -2^h\,12^m\,46^s$

„ „ $= \begin{matrix} -\ 18°52 \\ +161.48 \end{matrix}$ „ $\tau = +2^h\,12^m\,46^s$

Aus den halben Differenzen dieser Gleichungen erhalten wir:

$$W_{\mathrm{I}} = -0.63\,(x - d\alpha_{20})$$
$$W_{\mathrm{II}} = -0.71\,(x - d\alpha_{30})$$
$$W_{\mathrm{III}} = -0.46\,(x - d\alpha_{20})$$
$$W_{\mathrm{IV}} = -0.67\,(x - d\alpha_{30})$$

Sind nun kurz hintereinander zwei Sterne, der eine im Osten der andere im Westen mit denselben V gemessen, so resultieren aus ihnen Gleichungen, die $(x - d\alpha)$ und dV_c als Unbekannte enthalten, wenn wir annehmen, dass die y und $d\delta$ aus anderweitigen Untersuchungen als hinreichend bekannt vorauszusetzen sind. Für zwei Sterne der Deklinationen 35° und 40° würden wir z. B. bei der Polhöhe von 55° für die verschiedenen V haben:

$$W_a = +0.02\,y_{55} - 0.57\,(x - d\alpha_{35}) - 0.71\,d\delta_{35} - dV_{45}$$
$$W_b = -0.16\,y_{55} + 0.56\,(x - d\alpha_{40}) - 0.67\,d\delta_{40} - dV_{45}$$

$V = 45°$

im Osten $a_k = \begin{matrix} +\ 0°87 \\ -179°13 \end{matrix}$ und $\tau = -3^h\,58^m\,38^s$

„ Westen „ $= \begin{matrix} +\ 9°00 \\ -171°00 \end{matrix}$ „ $\tau = +4^h\,22^m\,53^s$

$$W_c = +0.70\,y_{55} - 0.41\,(x - d\alpha_{35}) - 0.87\,d\delta_{35} - dV_{25}$$
$$W_d = +0.41\,y_{55} + 0.52\,(x - d\alpha_{40}) - 0.73\,d\delta_{40} - dV_{25}$$

$V = 25°$

„ Osten „ $= \begin{matrix} +\ 44°15 \\ -135°85 \end{matrix}$ „ $\tau = -1^h\,26^m\,55^s$

„ Westen „ $= \begin{matrix} -\ 24°28 \\ +155°72 \end{matrix}$ „ $\tau = +2^h\ 0^m\,46^s$

Oder, bei umgekehrter Anordnung der Beobachtungen:

$$W_1 = +0.02\,y_{35} + 0.57\,(x - d\alpha_{35}) - 0.71\,d\delta_{35} - dV_{45} \quad \text{im Westen } a_k = \begin{matrix} -\ 0^{\circ}87 \\ +179^{\circ}13 \end{matrix} \text{ und } \tau = +3^{h}58^{m}38^{s}$$

$$W_2 = -0.16\,y_{55} - 0.56\,(x - d\alpha_{40}) - 0.67\,d\delta_{40} - dV_{45} \quad \text{„ Osten „} = \begin{matrix} -\ 9^{\circ}00 \\ +171^{\circ}00 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -4^{h}22^{m}53^{s}$$

$$W_3 = +0.70\,y_{55} + 0.41\,(x - d\alpha_{35}) - 0.87\,d\delta_{35} - dV_{25} \quad \text{„ Westen „} = \begin{matrix} -\ 44^{\circ}15 \\ +135^{\circ}85 \end{matrix} \text{ „ } \tau = +1^{h}26^{m}55^{s}$$

$$W_4 = +0.41\,y_{55} - 0.52\,(x - d\alpha_{40}) - 0.73\,d\delta_{40} - dV_{25} \quad \text{„ Osten „} = \begin{matrix} +\ 24^{\circ}28 \\ -155^{\circ}72 \end{matrix} \text{ „ } \tau = -2^{h}\ 0^{m}46^{s}$$

Aus den halben Summen und den halben Differenzen dieser Gleichungen aus Ost- und Westmessungen ergeben sich die zahlreichsten Beziehungen zwischen den $d\alpha_{35}$ und den $d\alpha_{40}$, ausserdem aber enthalten die entstehenden Relationen noch die Unbekannte dV_c, über die weiter unten noch ausgeführt werden soll. Aus dem ersten Gleichungspaar ergiebt sich z. B. durch Bildung von halber Summe und halber Differenz:

$$W_{\mathrm{I}} = -0.07\,y_{55} - 0.005\,x + 0.285\,d\alpha_{35} - 0.280\,d\alpha_{40} - 0.355\,d\delta_{35} - 0.335\,d\delta_{40} - dV_{45}$$

$$W_{\mathrm{II}} = +0.09\,y_{55} - 0.565\,x + 0.285\,d\alpha_{35} + 0.280\,d\alpha_{40} - 0.355\,d\delta_{35} + 0.335\,d\delta_{40}.$$

Ziehen wir die Grenzen innerhalb der Deklinationen der Sterne noch enger als die hier vorgesehenen fünf Grad, beobachten wir also schichtenweise, nur wenige Grade höchstens in Deklination von einander abstehende Sterne auf dem angegebenen Wege, so erhalten wir allgemein:

$$W_{\mathrm{I}} = r'y + s'\,(d\alpha_1 - d\alpha_2) - dV_c - td\delta_1 - ud\delta_3$$

$$W_{\mathrm{II}} = r''y + s''\,(d\alpha_1 + d\alpha_2) - 2s''\,x - td\delta_1 + ud\delta_2.$$

Ist nun zwischen den Messungen der beiden Sterne im Osten und Westen ein Zenitstern auf beiden Seiten des Meridians beobachtet, so resultiert aus den beiden Fällen, z. B. für $\delta_3 = 50^{\circ}$:

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= -0.16\,y_{55} - 0.64\,(x - d\alpha_{50}) - 0.16\,d\delta_{50} - dV_{15} \\ W_2 &= -0.16\,y_{55} + 0.64\,(x - d\alpha_{50}) - 0.16\,d\delta_{50} - dV_{15} \end{aligned}\right\} V = 15^{\circ}$$

bei $a_k = \begin{matrix} +\ 9^{\circ}79 \\ -170.21 \end{matrix}$ und $\tau = -1^{h}33^{m}31^{s}$

„ „ $= \begin{matrix} -\ 9^{\circ}79 \\ +170.21 \end{matrix}$ „ $\tau = +1^{h}33^{m}31^{s}$

und aus der halben Differenz dieser beiden Gleichungen:

$$W = 0.64\,(x - d\alpha_{50}).$$

Den aus diesen Zwischenbeobachtungen des Zenitsterns S_3 erlangten Wert des jeweiligen x in die obigen Gleichungen eingetragen, erhalten wir nunmehr Beziehungen zwischen den $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ und $d\alpha_3$, beziehungsweise deren Summen und Differenzen, die einer ausgleichenden Behandlung dieser Grössen überaus zugänglich sind.

Durch öftere Wiederholungen der Beobachtungen dieser Art mit den verschiedensten V und in anderen Polhöhen ergiebt sich wiederum wie bei den Deklinationen eine grosse Zahl von überaus verschiedenartigen Bedingungen zur Erlangung der $d\alpha$ der Fundamentalsterne.

In den zuletzt angeführten Gleichungen ist noch als Unbekannte enthalten die Grösse dV_c, deren Elimination gefordert wird. Für die Konstanz dieser Grösse sprechen schon die oben angeführten Gründe, die eine absolut sichere Verbindung von Querlibelle und Horizontalachse wohl möglich machen, ihre Kenntnis zu erlangen und sie während der Dauer der Beobachtungsreihen zu überwachen, kann durch geeignete Messungen erreicht werden. Durch Meridiandurchgänge bereits bestimmter Sterne kann man zwischen den einzelnen Messungen in extrameridionalen Azimuten die Grösse und auch die Konstanz von dV_c dauernd kontrollieren, da die bei Kulmination erlangte Gleichung lautet:

$$W = \pm 1.00\, y \mp 1.00\, d\delta - dV_c.$$

Noch besser aber lässt sich aus zwei symmetrisch zum Meridian angestellten V Beobachtungen desselben Sternes aus der halben Summe der resultierenden Gleichungen eine Kontrolle für die Richtigkeit der Annahme über die dV_c oder deren eventuelle, stetige kleine Veränderungen leicht gewinnen, da hier die Beziehung lautet:

$$W = my + nd\delta - dV_c$$

wo die Faktoren m und n stets <1 bleiben.

Wir sehen, dass uns die Beobachtungen im System V Beziehungen für die letzten, feinsten Verbesserungen der Oerter der Fundamentalsterne bieten, die einer Bestimmung dieser Grössen die besten Mittel liefern. Die weitgehendste Ausnutzung aller der durch Beobachtungen im Systeme V gebotenen Relationen entspräche einer schichtenweisen Zergliederung der Sterne nach Deklinationen in einer für die Ausgleichung nützlichsten Art, also einer gruppenweisen Bestimmung der gesuchten Verbesserungen. Zieht man vollends noch die in der zu Grunde liegenden Abhandlung noch dargelegten Beobachtungen im System K hinzu, so ist eine Mannigfaltigkeit der Beziehungen der $d\alpha$ und $d\delta$ der Fundamentalsterne gegeben, die nur fördernd für deren genaueste Bestimmung sein kann, besonders wenn durch die einheitliche Arbeit mehrerer

Sternwarten in verschiedenen Polhöhen sich die Zahl und auch die Unterschiedlichkeit der zu erlangenden Relationen noch wesentlich erhöht. Da bei den Reihen der vorbeschriebenen Art ferner nur Libelle und Mikrometer für die Winkelausmessung zur Anwendung kommen, macht sich der Beobachter gänzlich unabhängig von einer Menge von Fehlerquellen, die durch geteilte Kreise hervorgerufen werden.

Tafeln

zur Entnahme der Faktoren von $y, (x - d\alpha)$ und $d\delta$,
sowie der Einstellungsdaten a_k und τ.

$V = 25^0$

δ \ δ_z	y 40	y 45	y 50	y 55	$(x - d\alpha)$ 40	$(x - d\alpha)$ 45	$(x - d\alpha)$ 50	$(x - d\alpha)$ 55	$d\delta$ 40	$d\delta$ 45	$d\delta$ 50	$d\delta$ 55	a_k 40	a_k 45	a_k 50	a_k 55	τ 40	τ 45	τ 50	τ 55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
					0.00				— 1.00				— 90.00				0 0 0			
15	+ 1.00				+ 0.51	0.00			— 0.84	— 1.00			— 47.99	— 90.00			1 10 4	0 0 0		
20	+ 0.74	+ 1.00			+ 0.66	+ 0.48	0.00		— 0.68	— 0.85	— 1.00		— 29.62	— 46.91	— 90.00		35 40	1 14 18	0 0 0	
25	+ 0.49	+ 0.73	+ 1.00		+ 0.74	+ 0.62	+ 0.45	0.00	— 0.52	— 0.69	— 0.86	— 1.00	— 14.80	— 28.13	— 45.66	— 90.00	52 37	41 57	1 19 46	0 0 0
30	+ 0.26	+ 0.47	+ 0.71	+ 1 00	+ 0.76	+ 0.69	+ 0.57	+ 0.41	— 0.36	— 0.54	— 0.71	— 0.87	— 1.78	— 13 04	— 26.39	— 44.15	2 4 10	2 0 42	50 6	1 26 55
35	+ 0.03	+ 0.23	+ 0.44	+ 0.70	+ 0.74	+ 0.71	+ 0.63	+ 0.52	— 0.19	— 0.39	— 0.57	— 0.73	+ 10.73	+ 0.80	— 10.95	— 24.28	11 18	13 55	2 11 11	2 0 46
40	— 0.19	0.00	+ 0.19	+ 0.41	+ 0.70	+ 0.69	+ 0.64	+ 0.57	— 0.01	— 0.23	— 0.42	— 0.60	+ 22.64	+ 12 81	+ 2.81	— 8.41	13 55	22 35	26 37	24 59
45	— 0.39	— 0.22	— 0.04	+ 0.14	+ 0.63	+ 0.64	+ 0.62	+ 0.57	+ 0.19	— 0.05	— 0.27	— 0.46	+ 34.53	+ 24.78	+ 15.32	+ 5.65	11 11	26 37	37 25	43 28
50	— 0.57	— 0.42	— 0.26	— 0.10	+ 0.52	+ 0.57	+ 0.57	+ 0.54	+ 0.41	+ 0.14	— 0.10	— 0.32	+ 46.96	+ 36.64	+ 27.38	+ 18.47	0 46	24 59	43 28	57 25
55	— 0.73	— 0.60	— 0.46	— 0.32	+ 0.37	+ 0.47	+ 0.50	+ 0.49	+ 0.67	+ 0.36	+ 0.08	— 0.16	+ 61.11	+ 48.90	+ 39.22	+ 30.67	1 36 24	15 1	43 37	3 6 33
60	— 0.87	— 0.75	— 0.63	— 0.51	0.00	+ 0 33	+ 0.40	+ 0.42	+ 1.00	+ 0.63	+ 0.28	+ 0.01	+ 90.00	+ 62 66	+ 51.31	+ 42.55	0 0 0	1 49 22	34 45	9 49
65	— 1.00	— 0.88	— 0.78	— 0.68		0.00	+ 0 28	+ 0.33		+ 1.00	+ 0.58	+ 0.21		+ 90.00	+ 64.61	+ 53.57		0 0 0	7 58	8 51
70		— 1.00	— 0.90	— 0.81			0.00	+ 0.22			+ 1.00	+ 0.52			+ 90.00	+ 67.24			0 0 0	2 36 44
75			— 1.00	— 0.92				0.00				+ 1 00				+ 90.00				0 0 0
80				— 1.00																

$V = 20^0$

δ \ δ_z	y 40	y 45	y 50	y 55	$(x - d\alpha)$ 40	$(x - d\alpha)$ 45	$(x - d\alpha)$ 50	$(x - d\alpha)$ 55	$d\delta$ 40	$d\delta$ 45	$d\delta$ 50	$d\delta$ 55	a_k 40	a_k 45	a_k 50	a_k 55	τ 40	τ 45	τ 50	τ 55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
					0.00				— 1.00				— 90.00				0 0 0			
20	+ 1.00				+ 0.55	0.00			— 0.79	— 1.00			— 43.83	— 90.00			1 3 11	0 0 0		
25	+ 0.69	+ 1.00			+ 0.70	+ 0.52	0.00		— 0.58	— 0.80	— 1.00		— 23 41	— 42.86	— 90.00		24 59	1 7 19	0 0 0	
30	+ 0.40	+ 0.68	+ 1.00		+ 0.76	+ 0.66	+ 0.48	0.00	— 0.37	— 0.60	— 0.81	— 1.00	— 6 70	— 22.09	— 41.72	— 90 00	37 59	31 2	1 12 38	0 0 0
35	+ 0.12	+ 0.38	+ 0.66	+ 1.00	+ 0.75	+ 0.70	+ 0.60	+ 0 44	— 0.15	— 0.39	— 0.62	— 0.82	+ 8.54	— 5.20	— 20.54	— 40.34	44 48	45 36	38 51	1 19 35
40	— 0.15	+ 0.09	+ 0.35	+ 0.65	+ 0.70	+ 0.68	+ 0.64	+ 0.54	+ 0.09	— 0.17	— 0 42	— 0.64	+ 23.18	+ 10.17	— 3.38	— 18.65	45 36	53 43	55 29	49 6
45	— 0.40	— 0.18	+ 0.06	+ 0 32	+ 0.60	+ 0.63	+ 0.63	+ 0.57	+ 0.35	+ 0.06	— 0.21	— 0.45	+ 38.21	+ 24.84	+ 12.14	— 1.29	38 51	55 29	2 5 23	2 8 33
50	— 0.62	— 0.42	— 0 21	— 0.02	+ 0.44	+ 0.54	+ 0.58	+ 0.55	+ 0.65	+ 0.32	+ 0.02	— 0.25	+ 55.20	+ 39.78	+ 26.86	+ 14.60	19 35	49 6	8 33	20 58
55	— 0.82	— 0.64	— 0 45	— 0.25	0.00	+ 0 39	+ 0.48	+ 0.50	+ 1.00	+ 0.62	+ 0.28	— 0.03	+ 90.00	+ 56.46	+ 41 68	+ 29.40	0 0 0	28 49	2 53	26 20
60	— 1.00	— 0.83	— 0.66	— 0.49		0.00	+ 0.35	+ 0.41		+ 1.00	+ 0.59	+ 0.22		+ 90.00	+ 56 88	+ 44.12		0 0 0	1 44 58	22 4
65		— 1 00	— 0.84	— 0.70			0.00	+ 0.29			+ 1.00	+ 0.54			+ 90.00	+ 60.04			0 0 0	59 51
70			— 1.00	— 0.87				0.00				+ 1.00				+ 90.00				0 0 0
75				— 1.00																

$V = 15^0$

δ \ δ_z	y 40	y 45	y 50	y 55	$(x - d\alpha)$ 40	$(x - d\alpha)$ 45	$(x - d\alpha)$ 50	$(x - d\alpha)$ 55	$d\delta$ 40	$d\delta$ 45	$d\delta$ 50	$d\delta$ 55	a_k 40	a_k 45	a_k 50	a_k 55	τ 40	τ 45	τ 50	τ 55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
					0.00				— 1.00				— 90.00				0 0 0			
25	+ 1.00				+ 0.61	0 00			— 0.71	— 1.00			— 37.58	— 90.00			54 48	0 0 0		
30	+ 0.61	+ 1.00			+ 0.74	+ 0.57	0.00		— 0.42	— 0.72	— 1.00		— 13.83	— 36.74	— 90.00		1 11 28	0 58 40	0 0 0	
35	+ 0.24	+ 0.60	+ 1.00		+ 0.76	+ 0.68	+ 0.52	0.00	— 0.11	— 0.43	— 0.73	— 1.00	+ 6.23	— 12.72	— 35.74	— 90 00	18 30	1 16 58	1 3 40	0 0 0
40	— 0.11	+ 0.22	+ 0.59	+ 1.00	+ 0.69	+ 0.70	+ 0.63	+ 0.47	+ 0.22	— 0.13	— 0.45	— 0.75	+ 25.79	+ 7.48	— 11.39	— 34.53	16 58	25 7	24 7	1 10 12
45	— 0.43	— 0.13	+ 0.20	+ 0.57	+ 0.69	+ 0.70	+ 0.63	+ 0.47	+ 0.22	— 0.13	— 0.45	— 0.75	+ 25.79	+ 7.48	— 11.39	— 34.53	16 58	25 7	24 7	1 10 12
50	— 0.73	— 0.45	— 0.16	+ 0.17	+ 0.52	+ 0.63	+ 0.64	+ 0.56	+ 0.58	+ 0.20	— 0.16	— 0.48	+ 47.07	+ 26.99	+ 8.95	— 9.79	3 40	24 7	33 45	33 31
55	— 1.00	— 0.74	— 0.48	— 0.19	0.00	+ 0.47	+ 0.57	+ 0.56	+ 1.00	+ 0.57	+ 0.17	— 0.19	+ 90.00	+ 48.07	+ 28.44	+ 10.78	0 0 0	10 12	33 31	45 15
60		— 1.00	— 0.76	— 0.50		0.00	+ 0.42	+ 0.49		+ 1.00	+ 0.55	+ 0.13		+ 90.00	+ 49.28	+ 30.25		0 0 0	18 57	46 14
65			— 1.00	— 0.77			0.00	+ 0.37			+ 1.00	+ 0.51			+ 90.00	+ 50.82			0 0 0	31 3
70				— 1.00				0.00				+ 1.00				+ 90.00				0 0 0

$V = 10^0$

δ \ δ_z	y 40	y 45	y 50	y 55	$(x - d\alpha)$ 40	$(x - d\alpha)$ 45	$(x - d\alpha)$ 50	$(x - d\alpha)$ 55	$d\delta$ 40	$d\delta$ 45	$d\delta$ 50	$d\delta$ 55	a_k 40	a_k 45	a_k 50	a_k 55	τ 40	τ 45	τ 50	τ 55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
					0.00				— 1.00				— 90.00				0 0 0			
30	+ 1.00				+ 0.69	0.00			— 0.55	— 1.00			— 26.55	— 90.00			43 53	0 0 0		
35	+ 0.45	+ 1.00			+ 0.76	+ 0.64	0.00		— 0.07	— 0.56	— 1.00		+ 4.03	— 25 88	— 90.00		52 17	47 4	0 0 0	
40	— 0.07	+ 0.44	+ 1.00		+ 0.64	+ 0.70	+ 0.58	0.00	+ 0.44	— 0.09	— 0.57	— 1.00	+ 33.85	+ 4.83	— 25.08	— 90.00	47 4	56 39	51 24	0 0 0
45	— 0.56	— 0.09	+ 0.43	+ 1.00	0.00	+ 0.58	+ 0.64	+ 0.52	+ 1.00	+ 0.43	— 0.11	— 0.58	+ 90.05	+ 34.58	+ 5 85	— 24.10	0 0 0	51 24	1 2 21	57 6
50	— 1.00	— 0.57	— 0.10	+ 0.41		0.00	+ 0.52	+ 0.57		+ 1.00	+ 0.41	— 0.13		+ 90.00	+ 35.46	+ 7.07		0 0 0	57 6	1 9 56
55		— 1.00	— 0.58	— 0.12			0.00	+ 0.46			+ 1.00	+ 0.39			+ 90.00	+ 36.56			0 0 0	4 48
60			— 1.00	— 0.59				0.00				+ 1.00				+ 90.00				0 0 0
65				— 1.00																

$V = 5^0$

δ \ δ_z	y 40	y 45	y 50	y 55	$(x - d\alpha)$ 40	$(x - d\alpha)$ 45	$(x - d\alpha)$ 50	$(x - d\alpha)$ 55	$d\delta$ 40	$d\delta$ 45	$d\delta$ 50	$d\delta$ 55	a_k 40	a_k 45	a_k 50	a_k 55	τ 40	τ 55	τ 50	τ 55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
					0.00				— 1.00				— 90.00				0 0 0			
35	+ 1.00				+ 0.77	0.00			— 0.06	— 1.00			+ 0.87	— 90.00			26 8	0 0 0		
40	— 0.02	+ 1.00			0.00	+ 0.71	0.00		+ 1.00	— 0 06	— 1.00		+ 90.00	+ 1.60	— 90.00		0 0 0	28 19	0 0 0	
45	— 1.00	— 0.03	+ 1.00			0.00	+ 0.64	0.00		+ 1.00	— 0.06	— 1.00		+ 90.00	+ 2.36	— 90.00		0 0 0	31 9	0 0 0
50		— 1.00	— 0.04	+ 1.00			0.00	+ 0.57			+ 1.00	— 0.07			+ 90.00	+ 3.11			0 0 0	34 35
55			— 1.00	— 0.05				0.00				+ 1.00				+ 90.00				0 0 0
60				— 1.00																

$V = 45^0$

δ \ δ	y 40	45	50	55	$(x - d\alpha)$ 40	45	50	55	$d\delta$ 40	45	50	55	a_k 40	45	50	55	τ 40	45	50	55
													°	°	°		h m s	h m s	h m s	h m s
−5	+1.00				0.00				−1.00				−90.00				0 0 0			
0	+0.84	+1.00			+0.42	0.00			−0.91	−1.00			−57.02	−90.00			1 30 34	0 0 0		
5	+0.68	+0.82	+1.00		+0.57	+0.40	0.00		−0.82	−0.92	−1.00		−42.71	−55.64	−90.00		2 5 46	1 34 29	0 0 0	
10	+0.52	+0.65	+0.81	+1.00	+0.66	+0.54	+0.38	0.00	−0.74	−0.84	−0.92	−1.00	−31.22	−40.73	−54.07	−90.00	31 31	2 11 50	1 39 41	0 0 0
15	+0.36	+0.48	+0.62	+0.79	+0.71	+0.62	+0.50	+0.35	−0.67	−0.77	−0.85	−0.93	−21.17	−28.86	−38.48	−52.17	52 14	39 31	2 19 50	1 46 43
20	+0.21	+0.32	+0.44	+0.58	+0.74	+0.67	+0.58	+0.47	−0.60	−0.70	−0.78	−0.87	−12.00	−18.40	−25.08	−35.80	3 9 36	3 2 14	51 50	2 30 29
25	+0.06	+0.16	+0.26	+0.39	+0.76	+0.70	+0.62	+0.53	−0.53	−0.64	−0.72	−0.81	−3.55	−8.90	−15.10	−22.73	24 34	21 41	3 15 26	3 4 5
30	−0.08	0.00	+0.09	+0.21	+0.76	+0.71	+0.64	+0.56	−0.47	−0.58	−0.67	−0.76	+4.70	−0.05	−5.46	−11.20	37 50	38 58	37 36	32 53
35	−0.22	−0.15	−0.07	+0.02	+0.75	+0.70	+0.64	+0.57	−0.41	−0.52	−0.62	−0.71	+12.70	+8.40	+3.90	−0.87	49 26	54 34	57 41	58 38
40	−0.35	−0.28	−0.22	−0.16	+0.72	+0.68	+0.63	+0.56	−0.35	−0.47	−0.57	−0.67	+20.47	+16.55	+12.85	+9.00	59 26	4 8 53	4 16 38	4 22 53
45	−0.47	−0.41	−0.36	−0.32	+0.68	+0.64	+0.60	+0.54	−0.29	−0.41	−0.53	−0.64	+27.82	+24.45	+21.37	+18.37	4 8 43	22 10	34 34	46 34
50	−0.58	−0.53	−0.49	−0.46	+0.63	+0.59	+0.56	+0.51	−0.23	−0.36	−0.49	−0.61	+35.10	+32.15	+29.58	+27.42	16 38	34 34	52 19	5 10 5
55	−0.67	−0.64	−0.61	−0.59	+0.57	+0.54	+0.51	+0.47	−0.16	−0.32	−0.46	−0.59	+42.31	+39.67	+37.63	+36.27	22 53	46 34	5 10 5	34 48
60	−0.76	−0.73	−0.71	−0.71	+0.50	+0.48	+0.45	+0.41	−0.09	−0.27	−0.43	−0.58	+49.43	+47.06	+45.52	+45.00	27 31	57 46	28 53	6 1 46
65	−0.83	−0.81	−0.80	−0.81	+0.42	+0.41	+0.38	+0.34	0.00	−0.22	−0.42	−0.60	+56.52	+54.35	+53.35	+53.76	29 31	5 8 43	49 2	33 31
70	−0.89	−0.88	−0.88	−0.89	+0.34	+0.34	+0.31	+0.26	+0.09	−0.18	−0.42	−0.64	+63.59	+61.57	+61.12	+62.72	27 31	19 22	6 13 12	7 14 29
75	−0.94	−0.93	−0.92	−0.95	+0.25	+0.26	+0.23	+0.17	+0.22	−0.13	−0.45	−0.74	+70.75	+68.73	+68.98	+72.45	16 53	29 41	45 36	8 18 10
80	−0.98	−0.97	−0.97	−1.00	+0.16	+0.18	+0.14	0.00	+0.44	−0.09	−0.57	−1.00	+78.23	+75.84	+77.15	+90.00	3 44 38	39 58	7 40 19	12 0 0
85	−1.00	−0.99	−1.00		0.00	+0.09	0.00		+1.00	−0.04	−1.00		+90.00	+82.93	+90.00		0 0 0	50 10	12 0 0	
90		−1.00				0.00				0.00				+90.00				6 0 0		

$V = 40^0$

δ \ δ	y 40	45	50	55	$(x - d\alpha)$ 40	45	50	55	$d\delta$ 40	45	50	55	a_k 40	45	50	55	τ 40	45	50	55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
0	+1.00				0.00				−1.00				−90.00				0 0 0			
5	+0.82	+1.00			+0.44	0.00			−0.90	−1.00			−55.39	−90.00			1 26 0	0 0 0		
10	+0.65	+0.81	+1.00		+0.58	+0.42	0.00		−0.81	−0.91	−1.00		−40.35	−54.07	−90.00		59 19	1 30 5	0 0 0	
15	+0.48	+0.62	+0.79	+1.00	+0.67	+0.55	+0.39	0.00	−0.72	−0.82	−0.91	−1.00	−28.32	−38.48	−52.55	−90.00	2 23 26	2 5 36	1 35 29	0 0 0
20	+0.31	+0.44	+0.59	+0.78	+0.73	+0.63	+0.52	+0.36	−0.63	−0.74	−0.83	−0.92	−17.80	−26.05	−36.33	−50.75	42 34	31 41	2 13 46	1 42 35
25	+0.14	+0.26	+0.40	+0.56	+0.76	+0.68	+0.59	+0.48	−0.54	−0.66	−0.76	−0.85	−8.20	−15.15	−23.40	−33.76	58 22	52 48	42 26	2 24 32
30	−0.02	+0.09	+0.21	+0.35	+0.77	+0.71	+0.63	+0.54	−0.46	−0.58	−0.69	−0.78	+0.85	−5.25	−12.10	−20.25	3 11 41	3 10 36	3 6 7	56 35
35	−0.17	−0.07	+0.03	+0.15	+0.76	+0.71	+0.64	+0.57	−0.39	−0.51	−0.62	−0.72	+9.50	+3.99	−1.85	−8.40	22 48	26 5	26 38	3 23 41
40	−0.31	−0.22	−0.13	−0.04	+0.73	+0.69	+0.64	+0.57	−0.31	−0.44	−0.55	−0.66	+17.80	+12.85	+7.75	+2.40	32 10	39 36	44 58	47 53
45	−0.44	−0.36	−0.29	−0.22	+0.69	+0.66	+0.62	+0.56	−0.22	−0.36	−0.49	−0.61	+25.85	+21.37	+16.90	+12.50	39 36	51 26	4 1 41	4 10 17
50	−0.56	−0.49	−0.43	−0.38	+0.64	+0.62	+0.58	+0.53	−0.13	−0.29	−0.43	−0.56	+33.76	+29.58	+25.70	+22.10	44 58	4 1 41	17 12	31 43
55	−0.65	−0.61	−0.56	−0.52	+0.58	+0.56	+0.53	+0.49	−0.04	−0.22	−0.37	−0.52	+41.59	+37.63	+34.20	+31.32	47 53	10 19	31 41	52 51
60	−0.76	−0.71	−0.67	−0.65	+0.50	+0.49	+0.47	+0.44	+0.06	−0.14	−0.32	−0.48	+49.34	+45.52	+42.51	+40.30	47 29	16 58	45 31	5 14 26
65	−0.84	−0.80	W 0.77	−0.76	+0.41	+0.42	+0.41	+0.38	+0.19	−0.05	−0.26	−0.46	+57.19	+53.35	+50.65	+49.14	41 55	20 58	58 46	37 37
70	−0.91	−0.87	−0.85	−0.85	+0.31	+0.34	+0.33	+0.31	+0.35	+0.06	−0.21	−0.45	+65.22	+61.13	+58.65	+57.86	27 58	20 38	5 11 31	6 4 20
75	−0.96	−0.93	−0.91	−0.92	+0.21	+0.25	+0.25	+0.23	+0.58	+0.20	−0.16	−0.48	+74.08	+68.97	+66.57	+66.63	2 51 43	12 5	23 55	39 7
80	−1.00	−0.97	−0.96	−0.97	0.00	+0.16	+0.17	+0.14	+1.00	+0.43	−0.11	−0.58	+90.00	+77.15	+74.42	+75.72	0 0 0	3 41 41	36 5	7 36 26
85		−1.00	−0.99	−1.00		0.00	+0.09	0.00		+1.00	−0.05	−1.00		+90.00	+82.22	+90.00		0 0 0	48 5	12 0 0
90			−1.00				0.00				0.00				+90.00				6 0 0	

$V = 35^0$

δ \ δ_z	y 40	45	50	55	$(x - d\alpha)$ 40	45	50	55	$d\delta$ 40	45	50	55	a_k 40	45	50	55	τ 40	45	50	55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
5	+1.00				0.00				−1.00				−90.00				0 0 0			
10	+0.80	+1.00			+0.46	0.00			−0.89	−1.00			−53.43	−90.00			1 21 13	0 0 0		
15	+0.62	+0.79	+1.00		+0.61	+0.43	0.00		−0.78	−0.89	−1.00		−37.53	−52.18	−90.00		52 22	1 25 24	0 0 0	
20	+0.42	+0.59	+0.77	+1.00	+0.70	+0.57	+0.41	0.00	−0.67	−0.79	−0.90	−1.00	−24.82	−35.79	−50.74	−90.00	2 14 34	58 43	1 30 53	0 0 0
25	+0.24	+0.39	+0.56	+0.75	+0.74	+0.65	+0.53	+0.38	−0.57	−0.69	−0.81	−0.91	−13.69	−22.70	−33.76	−49.02	31 47	2 22 53	2 6 59	38 5
30	+0.06	+0.20	+0.35	+0.52	+0.76	+0.69	+0.60	+0.49	−0.47	−0.59	−0.72	−0.82	−3.43	−11.27	−20.22	−31.31	45 33	42 2	33 42	1 17 50
35	−0.11	+0.01	+0.15	+0.29	+0.76	+0.71	+0.63	+0.55	−0.37	−0.50	−0.63	−0.74	+6.14	−0.67	−8.42	−17.22	56 29	57 46	55 22	2 47 54
40	−0.26	−0.16	−0.04	+0.08	+0.74	+0.70	+0.64	+0.57	−0.27	−0.41	−0.54	−0.66	+15.33	+9.02	+2.32	−4.93	3 4 55	3 10 45	3 13 43	3 12 58
45	−0.41	−0.32	−0.22	−0.11	+0.70	+0.67	+0.63	+0.57	−0.16	−0.32	−0.46	−0.59	+24.26	+18.37	+12.46	+6.30	10 45	21 21	29 30	34 56
50	−0.55	−0.46	−0.38	−0.29	+0.64	+0.63	+0.60	+0.55	−0.04	−0.22	−0.38	−0.52	+33.03	+27.42	+22.07	+16.79	13 43	29 30	43 9	54 44
55	−0.67	−0.59	−0.52	−0.45	+0.57	+0.57	+0.55	+0.51	+0.09	−0.11	−0.29	−0.45	+41.76	+36.26	+31.32	+26.76	12 58	34 56	54 44	4 12 58
60	−0.77	−0.71	−0.65	−0.59	+0.49	+0.50	+0.49	+0.46	+0.23	+0.01	−0.20	−0.38	+50.59	+45.00	+40.31	+36.36	6 59	4 36 50	4 4 4	30 1
65	−0.86	−0.81	−0.76	−0.71	+0.39	+0.42	+0.42	+0.40	+0.41	+0.15	−0.10	−0.31	+59.80	+53.75	+49.13	+45.66	2 52 12	33 30	10 32	46 10
70	−0.94	−0.89	−0.85	−0.81	+0.26	+0.32	+0.34	+0.33	+0.65	+0.32	+0.02	−0.25	+70.10	+62.72	+57.86	+54.75	19 14	20 58	12 36	5 1 39
75	−1.00	−0.95	−0.92	−0.89	+0.00	+0.21	+0.25	+0.25	+1.00	+0.56	+0.17	−0.19	+90.00	+72.45	+66.62	+63.69	0 0 0	6 17	16 41	
80		−1.00	−0.97	−0.95		+0.00	+0.16	+0.17		+1.00	+0.41	−0.13		+90.00	+75.72	+72.52		47 45	0 0 0	31 19
85			−1.00	−0.99			+0.00	+0.09			+1.00	−0.06			+90.00	+81.28		3 38 11	0 0 0	45 43
90				−1.00				+0.00				0.00				+90.00				6 0 0

$V = 30^0$

δ \ δ_z	y 40	45	50	55	$(x - d\alpha)$ 40	45	50	55	$d\delta$ 40	45	50	55	a_k 40	45	50	55	τ 40	45	50	55
													°	°	°	°	h m s	h m s	h m s	h m s
10	+1.00				0.00				−1.00				−90.00				0 0 0			
15	+0.78	+1.00			+0.48	0.00			−0.87	−1.00			−51.04	−90.00			1 15 59	0 0 0		
20	+0.56	+0.76	+1.00		+0.63	+0.46	0.00		−0.74	−0.87	−1.00		−34.09	−49.87	−90.00		44 35	1 20 14	0 0 0	
25	+0.35	+0.54	+0.75	+1.00	+0.72	+0.60	+0.43	0.00	−0.61	−0.75	−0.88	−1.00	−20.49	−32.46	−48.51	−90.00	2 4 28	50 58	1 25 45	0 0 0
30	+0.15	+0.32	+0.51	+0.73	+0.76	+0.67	+0.55	+0.39	−0.49	−0.63	−0.77	−0.89	−8.53	−18.52	−30.56	−46.89	19 16	2 12 46	59 15	1 32 57
35	−0.04	+0.11	+0.28	+0.47	+0.77	+0.70	+0.61	+0.50	−0.36	−0.51	−0.66	−0.79	+2.60	−6.32	−16.24	−28.27	30 17	29 24	2 23 30	2 10 5
40	−0.22	−0.09	+0.06	+0.23	+0.75	+0.70	+0.64	+0.56	−0.23	−0.39	−0.55	−0.69	+12.99	+4.98	−3.75	−13.44	37 59	42 15	42 34	37 38
45	−0.39	−0.27	−0.14	+0.01	+0.70	+0.68	+0.64	+0.58	−0.09	−0.27	−0.44	−0.59	+23.13	+15.54	+7.83	−0.52	42 15	51 46	57 52	59 59
50	−0.55	−0.44	−0.32	−0.20	+0.64	+0.64	+0.61	+0.57	+0.06	−0.14	−0.32	−0.49	+33.14	+25.77	+18.62	+11.40	42 34	57 52	3 9 57	3 18 45
55	−0.69	−0.59	−0.48	−0.39	+0.56	+0.58	+0.56	+0.53	+0.23	0.00	−0.20	−0.38	+43.26	+35.80	+28.99	+22.50	37 38	59 59	18 45	34 35
60	−0.81	−0.72	−0.63	−0.55	+0.45	+0.50	+0.50	+0.48	+0.43	+0.17	−0.06	−0.27	+53.87	+45.84	+39.08	+33.10	24 31	56 37	23 40	47 35
65	−0.91	−0.83	−0.76	−0.69	+0.31	+0.39	+0.42	+0.42	+0.68	+0.38	+0.09	−0.15	+65.90	+56.24	+49.09	+43.36	1 55 34	44 26	23 8	57 20
70	−1.00	−0.92	−0.86	−0.80	0.00	+0.23	+0.33	+0.35	+1.00	+0.65	+0.28	−0.02	+90.00	+67.79	+59.27	+53.42	0 0 0	14 13	13 22	4 2 26
75		−1.00	−0.94	−0.89		0.00	+0.20	+0.26		+1.00	+0.55	+0.13		+90.00	+70.26	+63.44		0 0 0	2 42 55	3 59 0
80			−1.00	−0.96			0.00	+0.15			+1.00	+0.39			+90.00	+73.80			0 0 0	33 50
85				−1.00				0.00				+1.00				+90.00				0 0 0